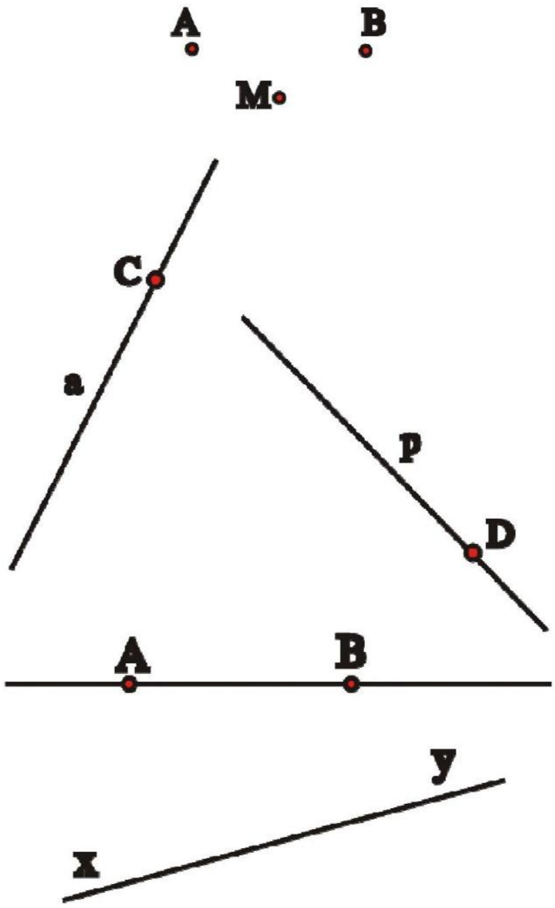
TỔNG HỢP KIẾN THỨC TOÁN THCS

1. Điểm - Đường thẳng

- *Người ta dùng các chữ cái in hoa A, B, C, ... để đặt tên cho điểm*
- *Bất cứ hình nào cũng là một tập hợp các điểm. Một điểm cũng là một hình.*

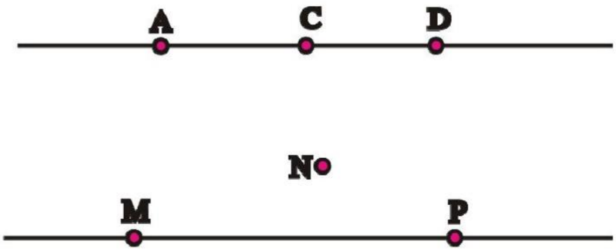
- *Người ta dùng các chữ cái thường a, b, c, ... m, p, ... để đặt tên cho các đường thẳng (hoặc dùng hai chữ cái in hoa hoặc dùng hai chữ cái thường, ví dụ đường thẳng AB, xy, ...)*
- *Điểm C thuộc đường thẳng a (điểm C nằm trên đường thẳng a hoặc đường thẳng a đi qua điểm C), kí hiệu là:* $C \in a$
- *Điểm M không thuộc đường thẳng a (điểm M nằm ngoài đường thẳng a hoặc đường thẳng a không đi qua điểm M), kí hiệu là:* $M \notin a$



2. Ba điểm thẳng hàng

- Ba điểm cùng thuộc một đường thẳng ta nói chúng thẳng hàng

- Ba điểm không cùng thuộc bất kì đường thẳng nào ta nói chúng không thẳng hàng.

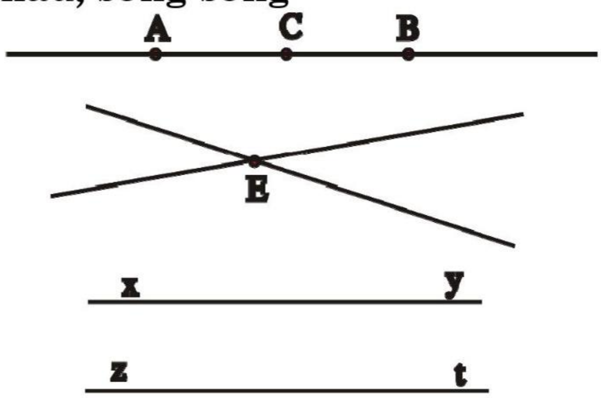


3. Đường thẳng trùng nhau, cắt nhau, song song

- Hai đường thẳng AB và BC như hình vẽ bên là hai đường thẳng trùng nhau.

- Hai đường thẳng chỉ có một điểm chung ta nói chúng cắt nhau, điểm chung đó được gọi là giao điểm (điểm E là giao điểm)

- Hai đường thẳng không có điểm

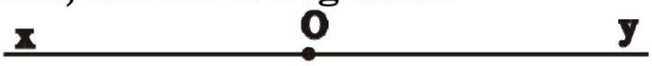


chung nào, ta nói chúng song song với nhau, kí hiệu xy//zt

4. Khái niệm về tia, hai tia đối nhau, hai tia trùng nhau

- Hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O được gọi là một tia gốc O (có hai tia Ox và Oy như hình vẽ)

- Hai tia chung gốc tạo thành đường thẳng được gọi là hai tia đối nhau (hai tia Ox và Oy trong hình vẽ là hai tia đối nhau)



- Hai tia chung gốc và tia này nằm trên tia kia được gọi là hai tia trùng nhau

- Hai tia AB và Ax là hai tia trùng nhau

5. Đoạn thẳng, độ dài đoạn thẳng

- Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B

- Hai điểm A và B là hai mút (hoặc hai đầu) của đoạn thẳng AB.

- Mỗi đoạn thẳng có một độ dài. Độ dài đoạn thẳng là một số dương

6. Khi nào thì AM + MB = AB ?

- Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B thì AM + MB = AB. Ngược lại, nếu AM + MB = AB thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B

7. Trung điểm của đoạn thẳng

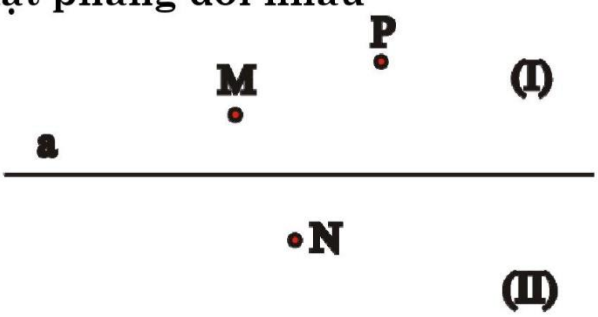
- Trung điểm M của đoạn thẳng AB là điểm nằm giữa A, B và cách đều A, B (MA = MB)

- Trung điểm M của đoạn thẳng AB còn gọi là điểm chính giữa của đoạn thẳng AB

8. Nửa mặt phẳng bờ a, hai nửa mặt phẳng đối nhau

- Hình gồm đường thẳng a và một phần mặt phẳng bị chia ra bởi a được gọi là một nửa mặt phẳng bờ a

- Hai nửa mặt phẳng có chung bờ được gọi là hai nửa mặt phẳng đối nhau (hai nửa mặt phẳng (I) và (II) đối nhau)



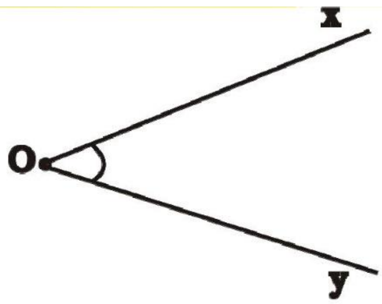
9. Góc, góc bẹt

- Góc là hình gồm hai tia chung gốc, gốc chung của hai tia gọi là đỉnh của góc, hai tia là hai cạnh của góc

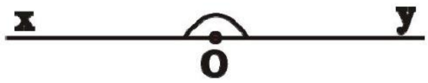
- Góc xOy kí hiệu là $\widehat{xOy}$ *hoặc* $\hat{O}$ *hoặc* $\angle xOy$

- Điểm O là đỉnh của góc

- Hai cạnh của góc : Ox, Oy



- Góc bẹt là góc có hai cạnh là hai tia đối nhau



10. So sánh hai góc, góc vuông, góc nhọn, góc tù.

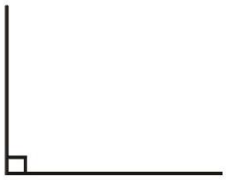
- So sánh hai góc bằng cách so sánh các số đo của chúng

- Hai góc xOy và uIv bằng nhau được kí hiệu là: $\widehat{xOy} = \widehat{uIv}$

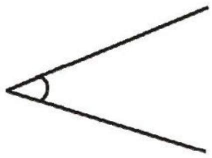
- Góc xOy nhỏ hơn góc uIv, ta viết:

$$\widehat{xOy} < \widehat{uIv} <=> \widehat{uIv} > \widehat{xOy}$$

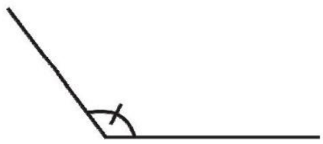
- Góc có số đo bằng $90^0 = 1v$*, là góc vuông*



- Góc nhỏ hơn góc vuông là góc nhọn



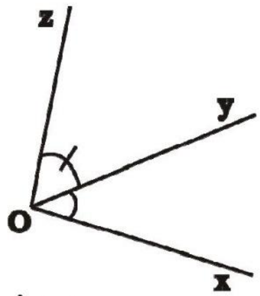
- Góc lớn hơn góc vuông nhưng nhỏ hơn góc bẹt là góc tù.



11. Khi nào thì $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$

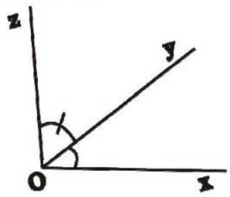
- Nếu tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz thì $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$.

- Ngược lại, nếu $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$ *thì tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz*



12. Hai góc kề nhau, phụ nhau, bù nhau, kề bù

- Hai góc kề nhau là hai góc có một cạnh chung và hai cạnh còn lại nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa cạnh chung.

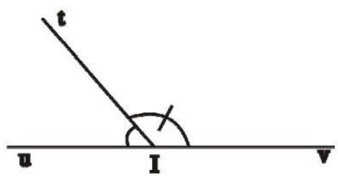


Hai góc kề nhau

- Hai góc phụ nhau là hai góc có tổng số đo bằng 90^0

- Hai góc bù nhau là hai góc có tổng số đo bằng 180^0

- Hai góc vừa kề nhau, vừa bù nhau được gọi là hai góc kề bù



Hai góc kề bù

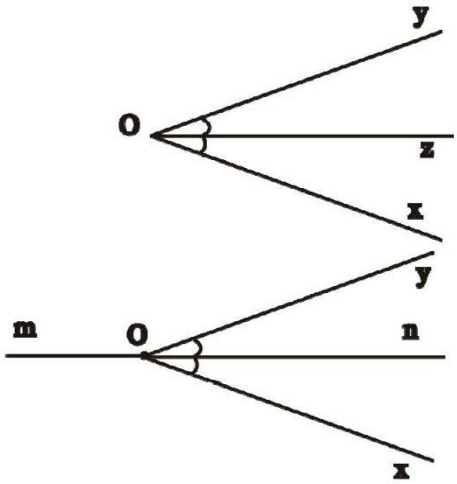
13. Tia phân giác của góc

- Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau

- Khi: $\widehat{xOz}+\widehat{zOy}=\widehat{xOy}$ và $\widehat{xOz}=\widehat{zOy}$

=> tia Oz là tia phân giác của góc xOy

- Đường thẳng chứa tia phân giác của một góc là đường phân giác của góc đó (đường thẳng mn là đường phân giác của góc xOy)



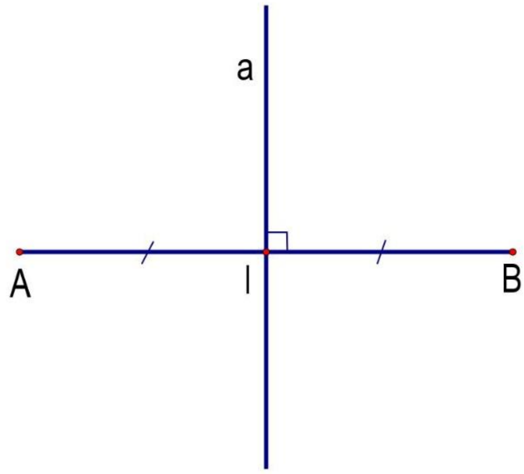
14. Đường trung trực của đoạn thẳng

a) Định nghĩa: *Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy*

b) Tổng quát:

a là đường trung trực của AB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \perp AB \text{ tại } I \\ IA = IB \end{cases}$$



15. Các góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng

a) Các cặp góc so le trong:

$\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_3$; $\widehat{A}_4$ và $\widehat{B}_2$.

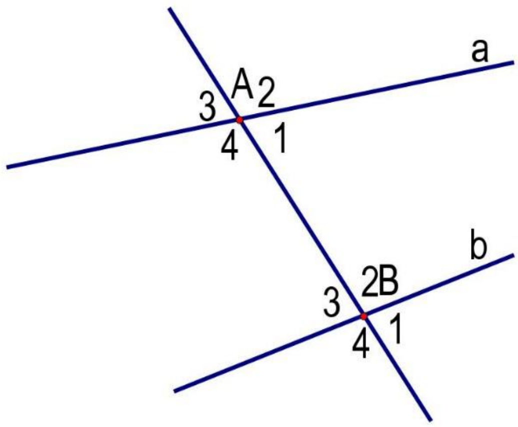
b) Các cặp góc đồng vị:

$\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_1$; $\widehat{A}_2$ và $\widehat{B}_2$;

$\widehat{A}_3$ và $\widehat{B}_3$; $\widehat{A}_4$ và $\widehat{B}_4$.

c) Khi a//b thì:

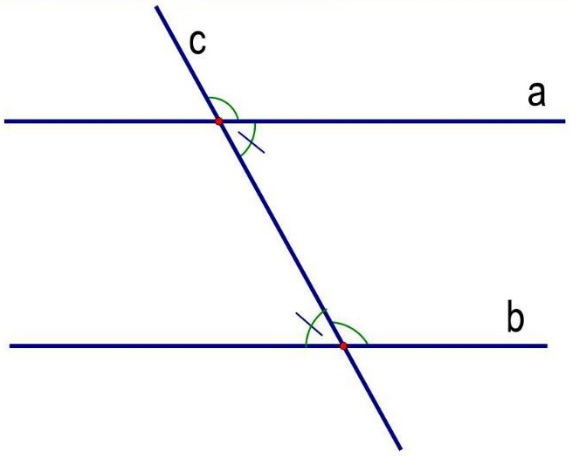
$\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_2$; $\widehat{A}_4$ và $\widehat{B}_3$ *gọi là các cặp góc trong cùng phía bù nhau*

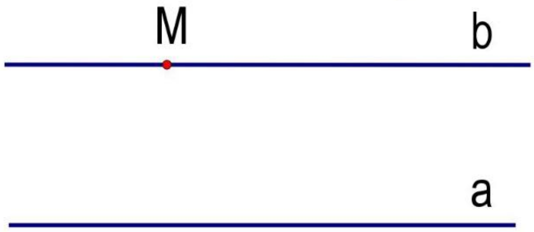


16. Hai đường thẳng song song

a) Dấu hiệu nhận biết

- Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b song song với nhau





b) Tiên đề Ơ_clít

- Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó

c, Tính chất hai đường thẳng song song

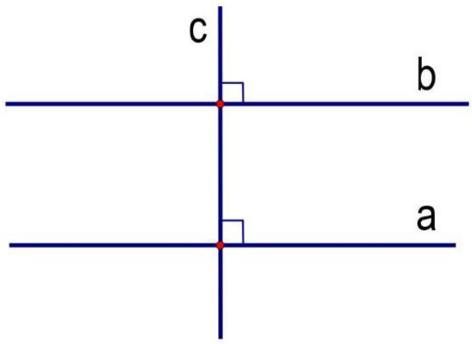
- Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

- ✓ *Hai góc so le trong bằng nhau;*
- ✓ *Hai góc đồng vị bằng nhau;*
- ✓ *Hai góc trong cùng phía bù nhau.*

d) Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song

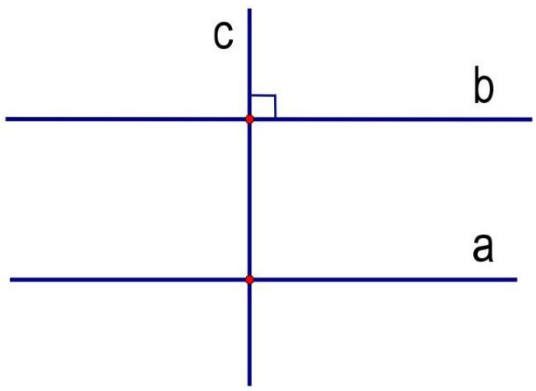
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau

$$\left.\begin{array}{l} a \perp c \\ b \perp c \end{array}\right\} \Rightarrow a // b$$



- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia

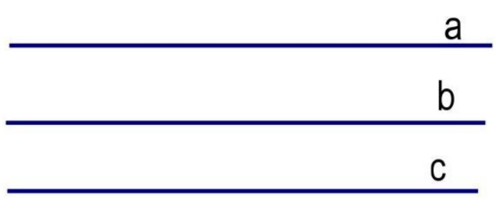
$$\left.\begin{array}{l} c \perp b \\ a // b \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp a$$



e) Ba đường thẳng song song

- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau

$a // c$ và $b // c \Rightarrow a // b$

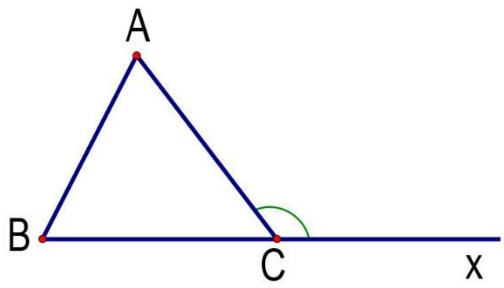


17. Góc ngoài của tam giác

a) Định nghĩa: *Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy*

b) Tính chất: *Mỗi góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó*

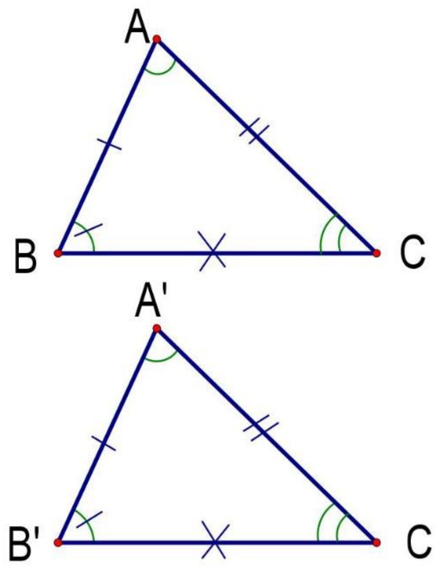
$$\widehat{ACx} = \widehat{A} + \widehat{B}$$



18. Hai tam giác bằng nhau

a) Định nghĩa: *Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau*

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A'B';\, AC = A'C';\, BC = B'C' \\ \widehat{A} = \widehat{A}';\quad \widehat{B} = \widehat{B}';\quad \widehat{C} = \widehat{C}' \end{cases}$$



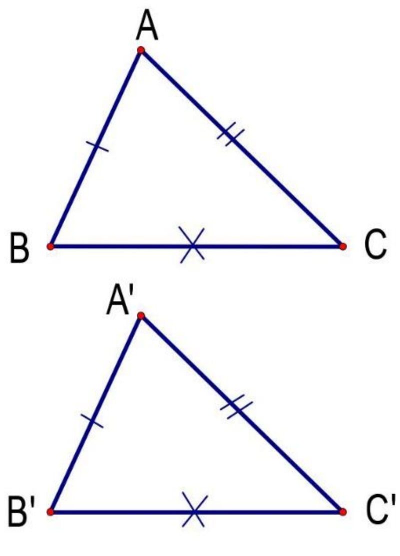
b) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác

****) Trường hợp 1:*** *Cạnh - Cạnh - Cạnh* ***(c.c.c)***

- Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' (c.c.c)$$

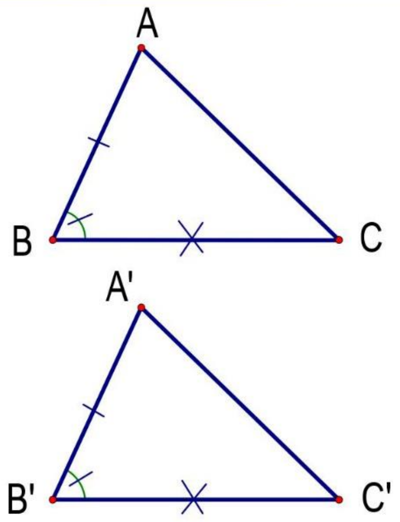


****) Trường hợp 2:** Cạnh - Góc - Cạnh*
(c.g.c)

- Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' (c.g.c)$$

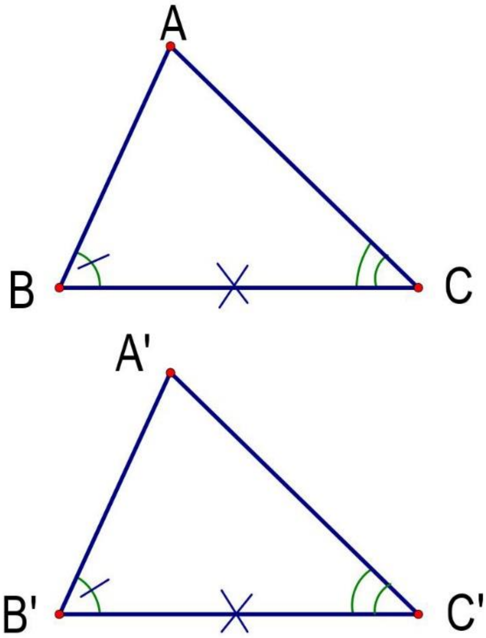


****) Trường hợp 3:** Góc - Cạnh - Góc **(g.c.g)***

- Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

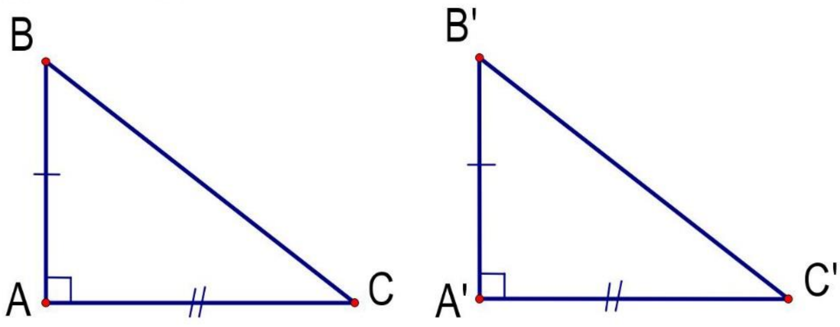
Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' (g.c.g)$$

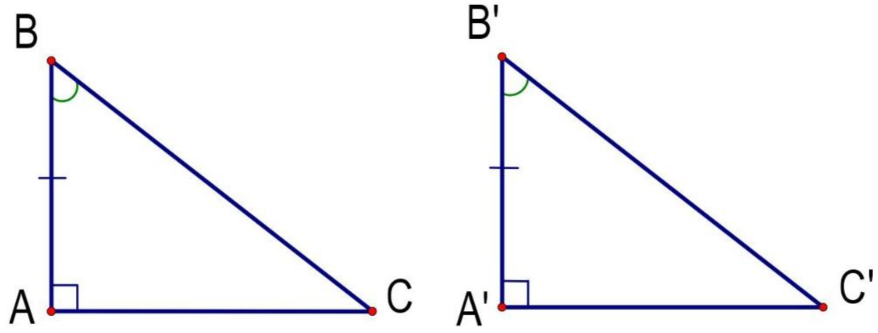


c) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông

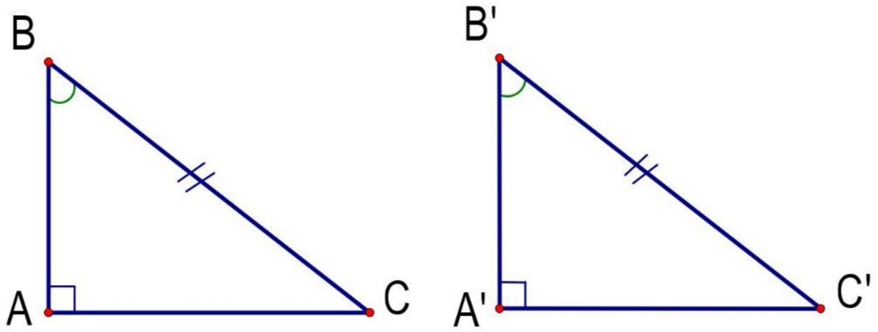
- ***Trường hợp 1:** Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*



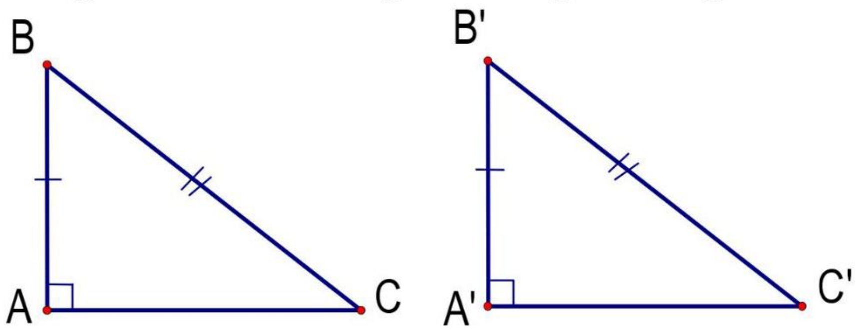
- ***Trường hợp 2**: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc* *nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai giác vuông đó bằng nhau.*



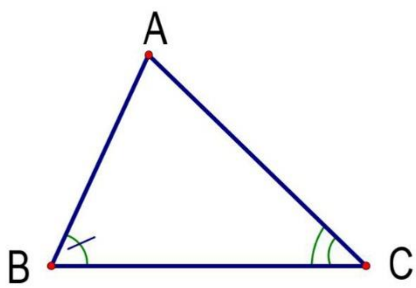
➢ ***Trường hợp 3:*** *Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*



➢ ***Trường hợp 4:*** *Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*



19. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác (*quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác*)



- *Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn*

ΔABC : Nếu $AC > AB$ thì $\hat{B} > \hat{C}$

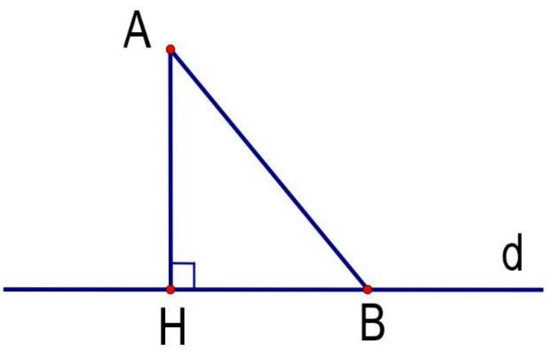
✓ *Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn*

ΔABC : Nếu $\hat{B} > \hat{C}$ thì $AC > AB$

20. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

Khái niệm đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên

- Lấy $A \notin d$, kẻ $AH \perp d$, lấy $B \in d$ và $B \neq H$. Khi đó:
- *Đoạn thẳng AH gọi là đường vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng d*
- *Điểm H gọi là hình chiếu của A trên đường thẳng d*
- *Đoạn thẳng AB gọi là một đường xiên kẻ từ A đến đường thẳng d*
- *Đoạn thẳng HB gọi là hình chiếu của đường xiên AB trên đ.thẳng d*



Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc:

Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu:

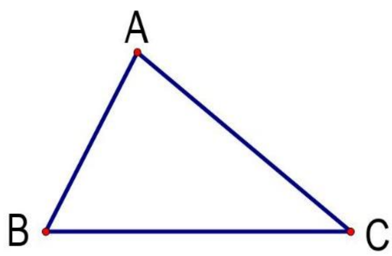
Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, thì:

- ✓ *Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn*
- ✓ *Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn*
- ✓ *Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.*

21. Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức tam giác

- *Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.*

$$AB + AC > BC$$
$$AB + BC > AC$$
$$AC + BC > AB$$



- *Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.*

$$AC - BC < AB$$
$$AB - BC < AC$$
$$AC - AB < BC$$

- *Nhận xét* : *Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn* *hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại.*

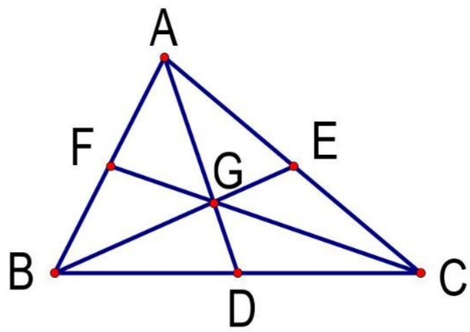
VD: $AB - AC < BC < AB + AC$

21. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

- Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy:

$$\frac{GA}{DA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{FC} = \frac{2}{3}$$

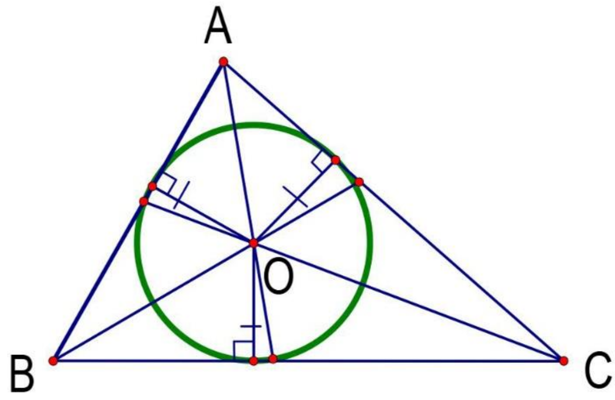
G là trọng tâm của tam giác ABC



22. Tính chất ba đường phân giác của tam giác

- Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó

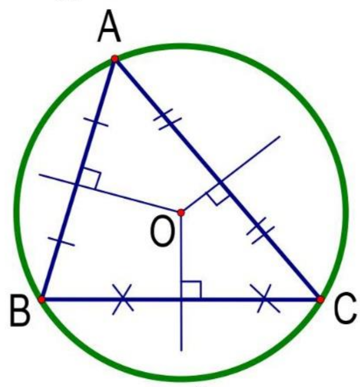
- Điểm O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC



23. Tính chất ba đường trung trực của tam giác

- Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó

- Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC



24. Phương pháp chứng minh một số bài toán cơ bản

(*sử dụng một trong các cách sau đây*)

a) Chứng minh tam giác cân

1. *Chứng minh tam giác có hai cạnh bằng nhau*
2. *Chứng minh tam giác có hai góc bằng nhau*
3. *Chứng minh tam giác đó có đường trung tuyến vừa là đường cao*
4. *Chứng minh tam giác đó có đường cao vừa là đường phân giác ở đỉnh*

b) Chứng minh tam giác đều

1. *Chứng minh tam giác đó có ba cạnh bằng nhau*
2. *Chứng minh tam giác đó có ba góc bằng nhau*
3. *Chứng minh tam giác cân có một góc là 60^0*

c) Chứng minh một tứ giác là hình bình hành

1. *Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành*
2. *Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành*

3. Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành
4. Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành
5. Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành

d) Chứng minh một tứ giác là hình thang:

Ta chứng minh tứ giác đó có hai cạnh đối song song

e) Chứng minh một hình thang là hình thang cân

1. Chứng minh hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau
2. Chứng minh hình thang có hai đường chéo bằng nhau

f) Chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật

1. Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
2. Hình thanh cân có một góc vuông là hình chữ nhật
3. Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật
4. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật

g) Chứng minh một tứ giác là hình thoi

1. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau
2. Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau
3. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau
4. Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc

h) Chứng minh một tứ giác là hình vuông

1. Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau
2. Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc
3. Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc
4. Hình thoi có một góc vuông
5. Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau

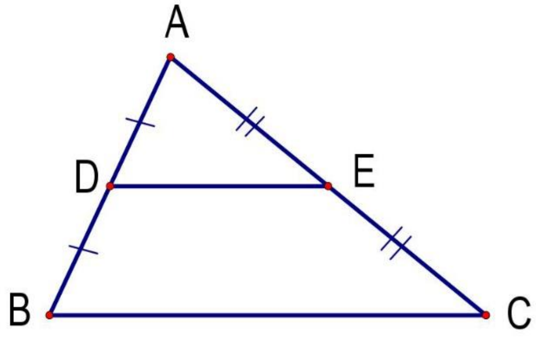
25. Đường trung bình của tam giác, của hình thang

a) Đường trung bình của tam giác

- ✓ *Định nghĩa:* *Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác*
- ✓ *Định lí:* *Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy*

DE là đường trung bình của tam giác

$$DE // BC, DE = \frac{1}{2}BC$$

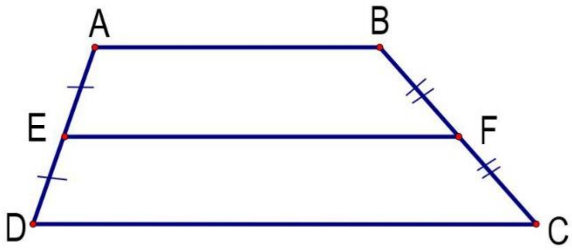


b) Đường trung bình của hình thang

- ✓ *<u>Định nghĩa:</u> Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang*
- ✓ *<u>Định lí:</u> Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy*

EF là đường trung bình của hình thang ABCD

$$EF//AB,\ EF//CD,\ EF = \frac{AB + CD}{2}$$

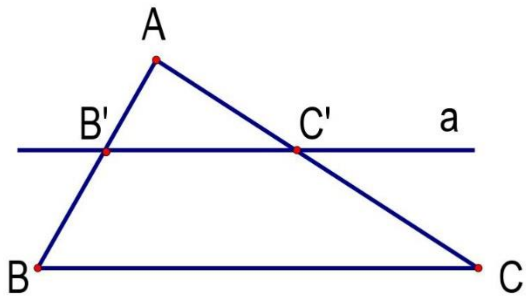


26. Tam giác đồng dạng

a) Định lí Ta_lét trong tam giác:

- Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ

$$B'C'//BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC};\ \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C};\ \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}$$



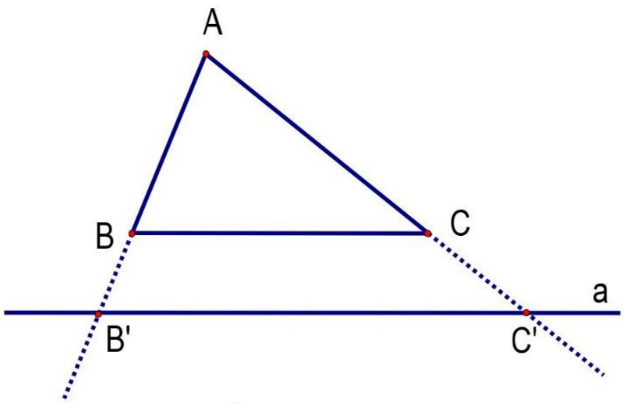
b) Định lí đảo của định lí Ta_lét:

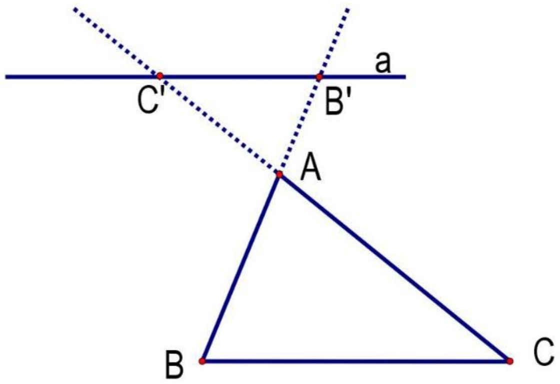
- Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác

Ví dụ: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow B'C'//BC$; *Các trường hợp khác tương tự*

c) Hệ quả của định lí Ta_lét

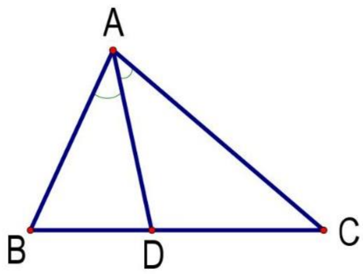
- Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho. Hệ quả còn đúng trong trường hợp đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại $\left(B'C'//BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}\right)$

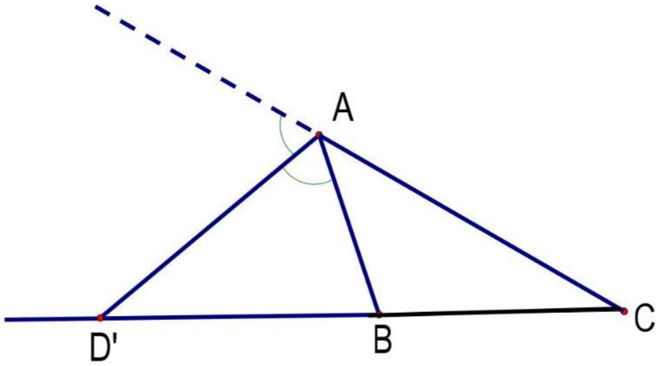




d) Tính chất đường phân giác của tam giác:

- Đường phân giác trong (hoặc ngoài) của một tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề của hai đoạn đó





$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$

e) Định nghĩa hai tam giác đồng dạng :

- Hai tam giác đồng dạng là hai tam giác có các góc tương ứng bằng nhau và các cạnh tương ứng tỉ lệ

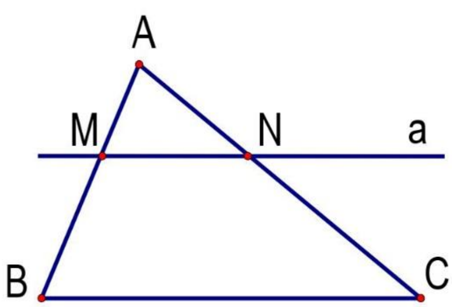
$$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' <=> \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k(\text{tỉ số đồng dạng}) \end{cases}$$

f) Định lí về hai tam giác đồng dạng:

- Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho

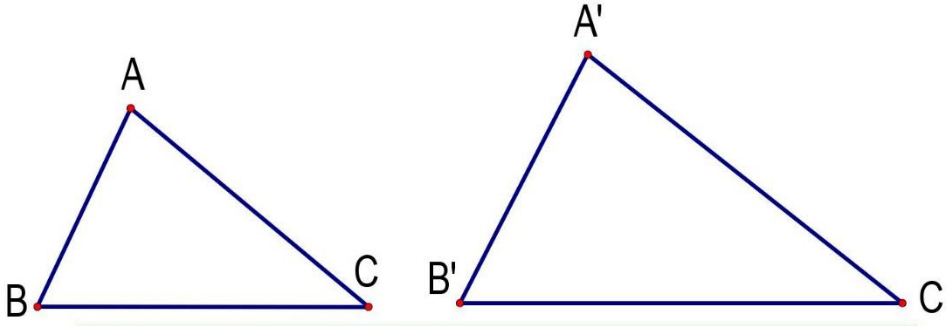
$$MN // BC => \Delta AMN \backsim \Delta ABC$$

****) Lưu ý:** Định lí cũng đúng đối với trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại*



g) Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

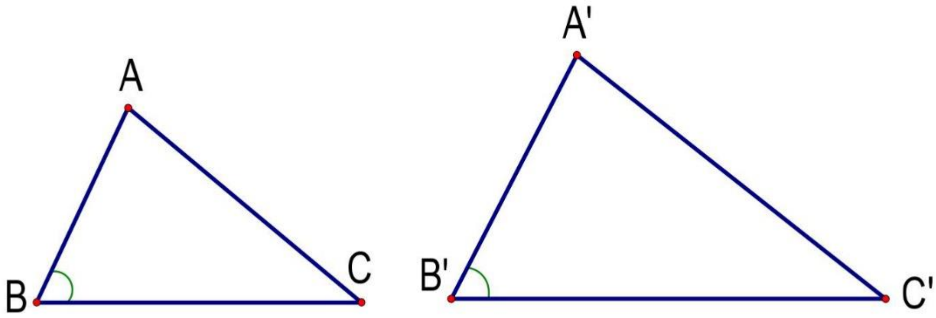
*)***Trường hợp 1:*** *Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.*



Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' (c.c.c)$$

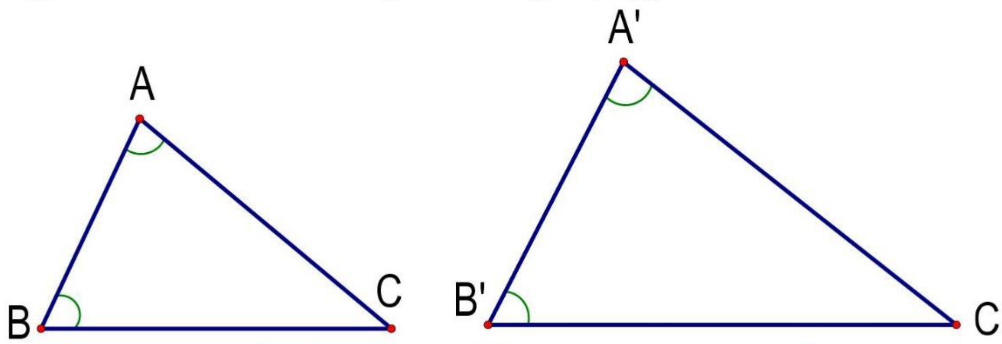
*)***Trường hợp 2:*** *Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đồng dạng*



Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' (c.g.c)$$

*)***Trường hợp 3:*** *Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đồng dạng;*



Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

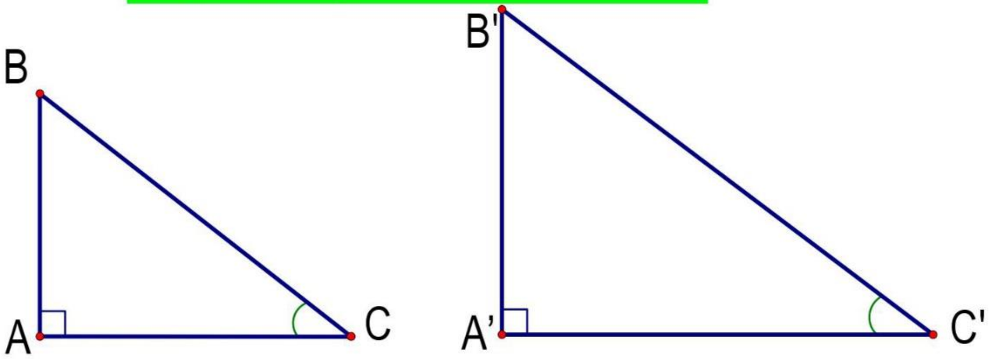
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' (g.g)$$

h) Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông

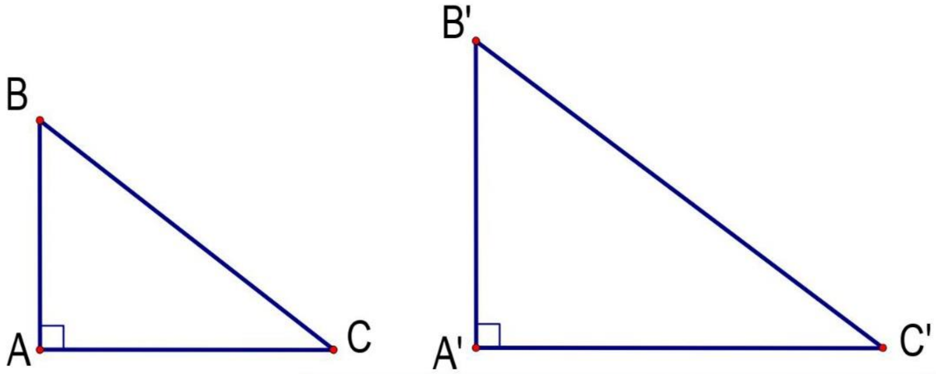
*)***Trường hợp 1***: *Nếu hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau thì chúng đồng dạng.*

Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{A}' = 90^0 \\ \widehat{C} = \widehat{C}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$



*)***Trường hợp 2:*** *Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.*



Hai tam giác vuông ABC và A'B'C' có:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$

*)***Trường hợp 3***: *Nếu cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông kia thì hai giác đó đồng dạng.*

Hai tam giác vuông ABC và A'B'C' có:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$

27. Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

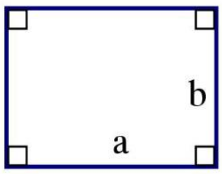
- Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng

- Tỉ sô diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng

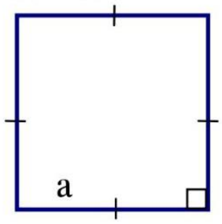
- Cụ thể : $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số k

$$=> \boxed{\frac{A'H'}{AH} = k \text{ và } \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2}$$

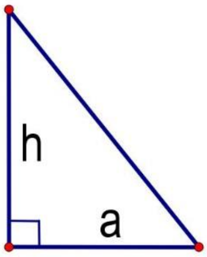
28. Diện tích các hình



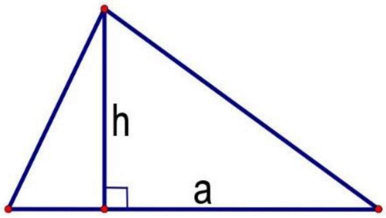
$S = a.b$



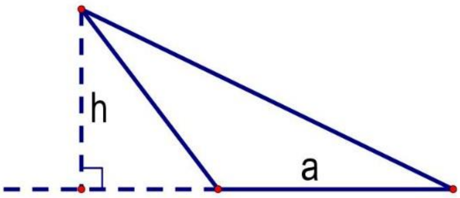
$S = a^2$



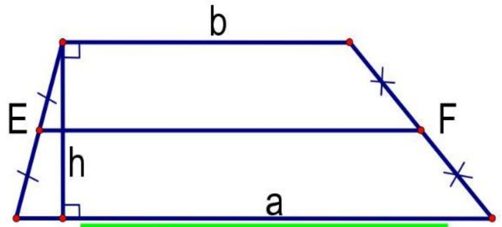
$S = \frac{1}{2}ah$



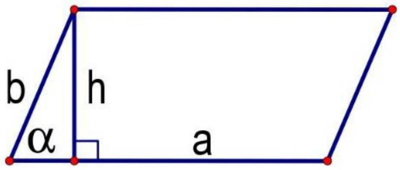
$S = \frac{1}{2}ah$



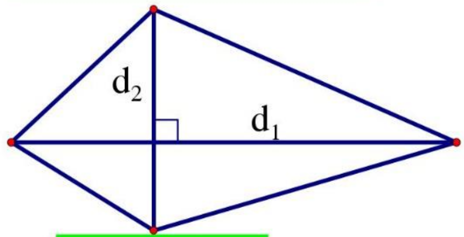
$S = \frac{1}{2}ah$



$S = \frac{1}{2}(a+b)h = EF.h$



$S = a.h = a.b.\sin\alpha$



$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$

Chú ý:

1. Diện tích đa giác đều n cạnh, mỗi cạnh có độ dài bằng a được tính theo công thức $S = \frac{1}{4}.na\sqrt{4R^2 - a^2}$ *(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đều)*

2. Diện tích tam giác:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.a.h_a = \frac{1}{2}a.b.sinC = p.r = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

+) a, b, c là độ dài các cạnh tương ứng

+) h_a *là độ dài đường cao ứng với cạnh a*

+) C là độ lớn của góc xen giữa hai cạnh a, b

+) p là nửa chu vi của tam giác

+) r là độ dài bán kính đường tròn nội tiếp tam giác

+) R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

29. Học sinh cần nắm vững các bài toán dựng hình cơ bản

(dùng thước thẳng, thước đo độ, thước có chia khoảng, compa, êke)

a) Dựng một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước;

b) Dựng một góc bằng một góc cho trước;

c) Dựng đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước, dựng trung điểm của một đoạn thẳng cho trước;

d) Dựng tia phân giác của một góc cho trước;

e) Qua một điểm cho trước, dựng đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước;

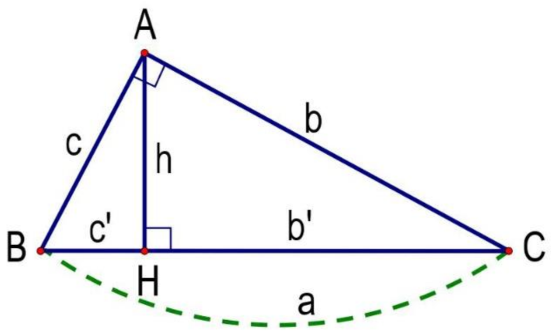
f) Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước;

g) Dựng tam giác biết ba cạnh, hoặc biết hai cạnh kề và góc xen giữa, hoặc biết một cạnh và hai góc kề.

30. Hệ thức lượng trong tam giác vuông (lớp 9)

a) Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

- ✓ $b^2 = ab'$
- ✓ $c^2 = ac'$
- ✓ $a^2 = b^2 + c^2$ (Pi_ta_go)
- ✓ $bc = ah$
- ✓ $h^2 = b'c'$
- ✓ $\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{h^2}$

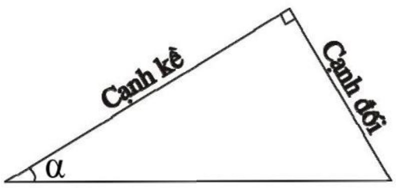


b) Tỉ số lượng giác của góc nhọn

✓ *Định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn*

$\sin\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$

$\text{tg}\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$ $\qquad \cot\text{g}\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$



✓ *Một số tính chất của các tỉ số lượng giác*

+) *Định lí về tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau*

Cho hai góc α và β phụ nhau. Khi đó:

$\sin\alpha = \cos\beta$; $\quad$ *$\text{tg}\alpha = \text{cotg}\beta$;* $\quad$ *$\cos\alpha = \sin\beta$;* $\quad$ *$\text{cotg}\alpha = \text{tg}\beta$.*

+) *Cho* $0^0 < \alpha < 90^0$. *Ta có:*

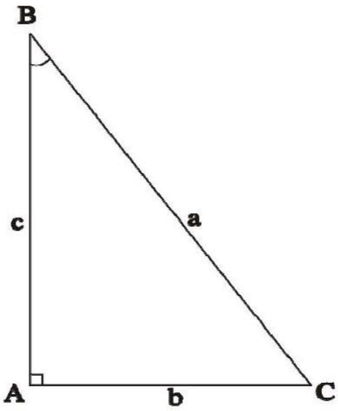
$0 < \sin\alpha < 1; \quad 0 < \cos\alpha < 1; \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \cot\text{g}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \text{tg}\alpha.\cot\text{g}\alpha = 1$

✓ *So sánh các tỉ số lượng giác*

$0^0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 90^0 \Rightarrow \sin\alpha_1 < \sin\alpha_2 ; \cos\alpha_1 > \cos\alpha_2 ; tg\alpha_1 < tg\alpha_2 ; \cot g\alpha_1 > \cot g\alpha_2$

c) Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông



$b = a.sinB; \qquad c = a.sinC$

$b = a.cosC; \qquad c = a.cosB$

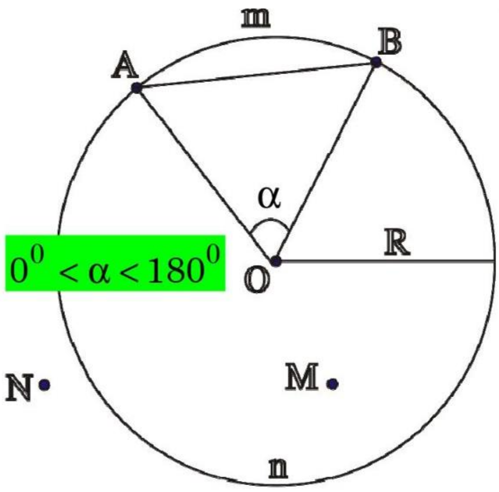
$b = c.tgB; \qquad c = b.tgC$

$b = c.cotgC; \qquad c = b.cotgB$

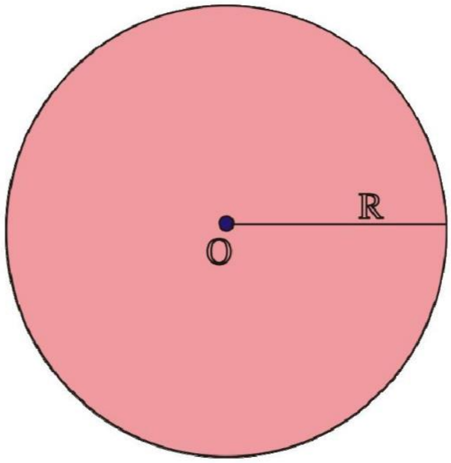
$$\Rightarrow a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\cos C} = \frac{c}{\cos B}$$

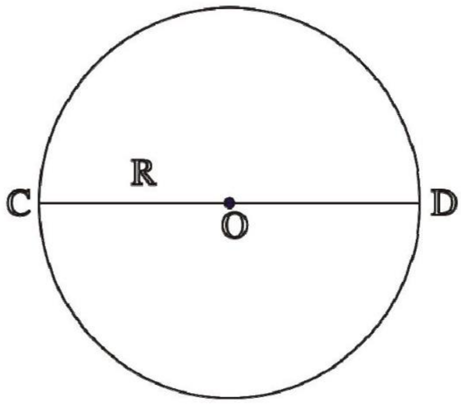
31. Đường tròn, hình tròn, góc ở tâm, số đo cung

- *Đường tròn tâm O, bán kính R là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R, kí hiệu (O ; R).*
- *Hình tròn là hình gồm các điểm nằm trên đường tròn và các điểm nằm bên trong đường tròn đó.*
- *Trên hình vẽ:*
+) *Các điểm A, B, C, D nằm trên (thuộc) đường tròn; OA = OB = OC = OD = R.*
+) *M nằm bên trong đường tròn; OM < R*
+) *N nằm bên ngoài đường tròn; ON > R*
+) *Đoạn thẳng AB là dây cung (dây)*
+) *CD = 2R, là đường kính (dây cung lớn nhất, dây đi qua tâm)*
+) $\overset{\frown}{AmB}$ *là cung nhỏ* $(0^0 < \alpha < 180^0)$
+) $\overset{\frown}{AnB}$ *là cung lớn*
+) *Hai điểm A, B là hai mút của cung*
- *Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm (* $\widehat{AOB}$ *là góc ở tâm chắn cung nhỏ AmB)*
- *Góc bẹt COD chắn nửa đường tròn*
- *Số đo cung:*
  +) *Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó*
  $$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AmB} = \alpha \quad (0^0 < \alpha < 180^0)$$
  +) *Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa* 360^0 *và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn)*
  $$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AnB} = 360^0 - \alpha$$
  +) *Số đo của nửa đường tròn bằng* 180^0*, số đo của cả đường tròn bằng* 360^0



$0^0 < \alpha < 180^0$





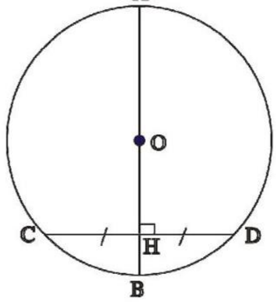
$\alpha = 180^0$

32. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- *Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy*

$$AB \perp CD \text{ tại } H \Rightarrow HC = HD$$

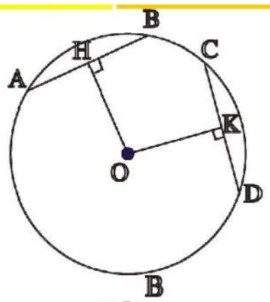
- *Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy*



33. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

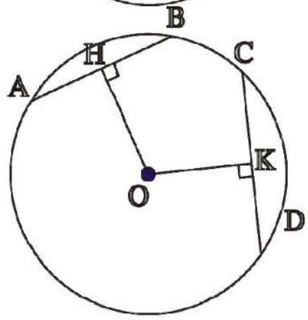
Định lí 1: *Trong một đường tròn*
a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm
b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau

$$AB = CD \Rightarrow OH = OK$$
$$OH = OK \Rightarrow AB = CD$$



Định lí 2: *Trong hai dây của một đường tròn*
a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn
b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn

$$AB < CD \Rightarrow OH > OK$$
$$OH > OK \Rightarrow AB < CD$$

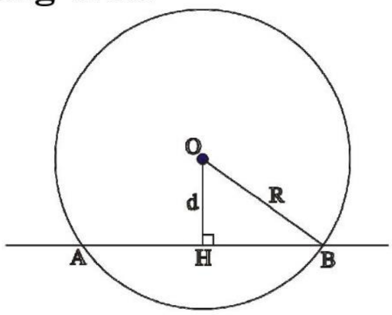


34. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

a) Đường thẳng và đường tròn cắt nhau
(có hai điểm chung)

- Đường thẳng a gọi là cát tuyến của (O)

$$d = OH < R \text{ và } HA = HB = \sqrt{R^2 - OH^2}$$

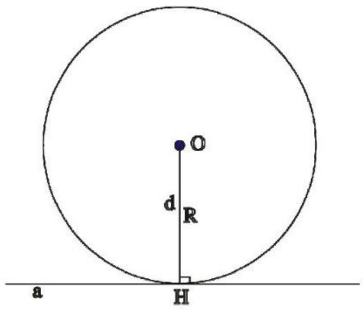


b) Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau *(có một điểm chung)*
- Đường thẳng a là tiếp tuyến của (O)
- Điểm chung H là tiếp điểm

$$d = OH = R$$

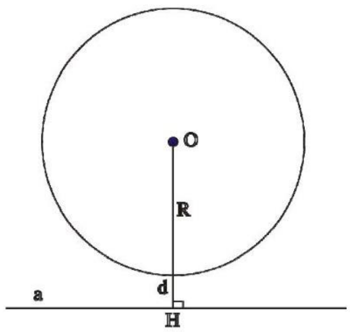
**) <u>Tính chất tiếp tuyến</u>: Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.*

$$a \text{ là tiếp tuyến của (O) tại } H \Rightarrow a \perp OH$$



c) Đường thẳng và đường tròn không giao nhau *(không có điểm chung)*

$$d = OH > R$$

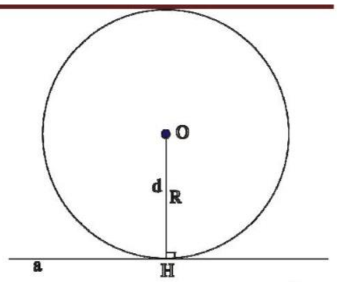


35. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

- Để nhận biết một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn ta có hai dấu hiệu sau:

- ✓ *Dấu hiệu 1: Đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung (định nghĩa tiếp tuyến)*
- ✓ *Dấu hiệu 2: Đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó*

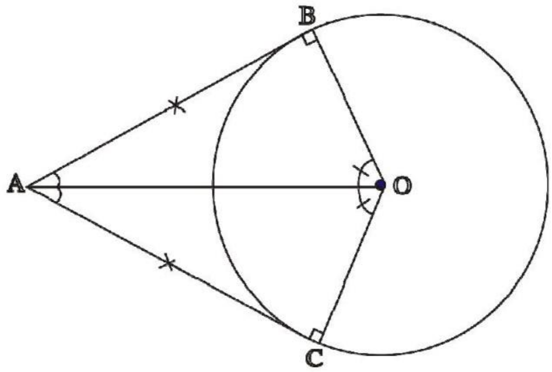
$\left.\begin{array}{c} H \in (O) \\ a \perp OH \text{ tại } H \end{array}\right\} \Rightarrow$ a là tiếp tuyến của (O)



36. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau; đường tròn nội tiếp, bàng tiếp tam giác

a) Định lí: *Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:*

- ✓ *Điểm đó cách đều hai tiếp điểm*
- ✓ *Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến*
- ✓ *Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.*

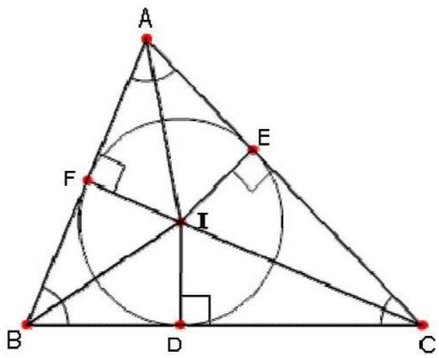


$AB = AC; \widehat{OAB} = \widehat{OAC}; \widehat{AOB} = \widehat{AOC}$

b) Đường tròn nột tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, khi đó tam giác gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn

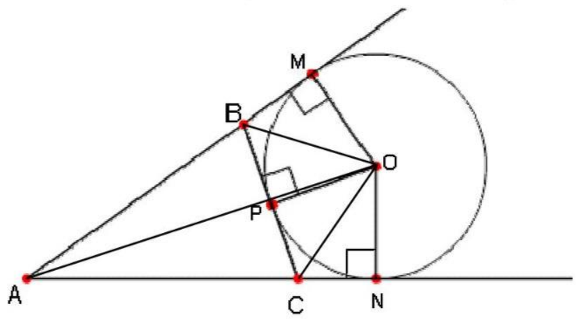
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong của tam giác



c) *Đường tròn bàng tiếp tam giác*

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác

- Tâm của đường tròn bàng tiếp là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại hai đỉnh nào đó hoặc là giao điểm của một đường phân giác góc trong và một đường phân giác góc ngoài tại một đỉnh

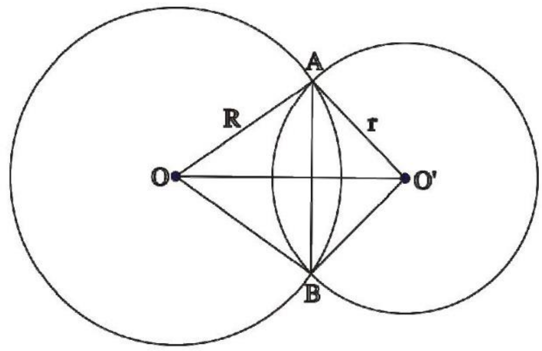


- Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp (hình vẽ là đường tròn bàng tiếp trong góc A)

37. Vị trí tương đối của hai đường tròn, tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

a) Hai đường tròn cắt nhau

(có hai điểm chung)



- Hai điểm A, B là hai giao điểm

- Đoạn thẳng AB là dây chung

$R - r < OO' < R + r$

- Đường thẳng OO' là đường nối tâm, đoạn thẳng OO' là đoạn nối tâm

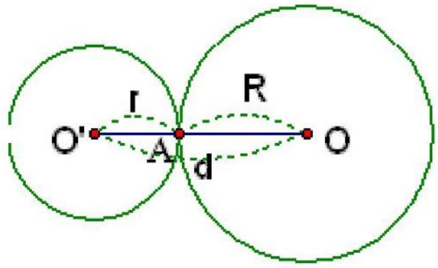
**) <u>Tính chất đường nối tâm</u>: Đường nối tâm là đường trung trực của dây chung*

b) Hai đường tròn tiếp xúc nhau

(có một điểm chung)

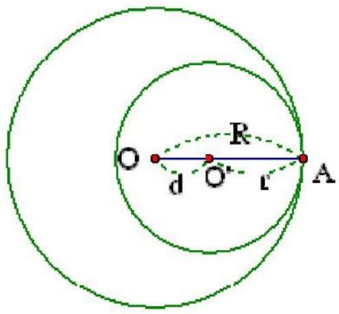
- Điểm chung A gọi là tiếp điểm

+) Tiếp xúc ngoài tại A:



$OO' = R + r$

+) Tiếp xúc trong tại A:

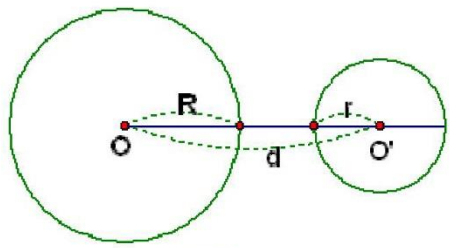


$OO' = R - r$

c) Hai đường tròn không giao nhau

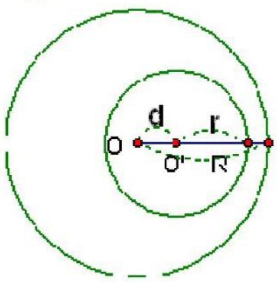
(không có điểm chung)

+) Ở ngoài nhau:



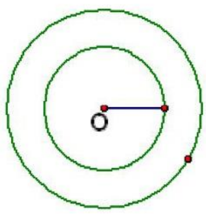
$OO' > R + r$

+) Đựng nhau:



$OO' < R - r$

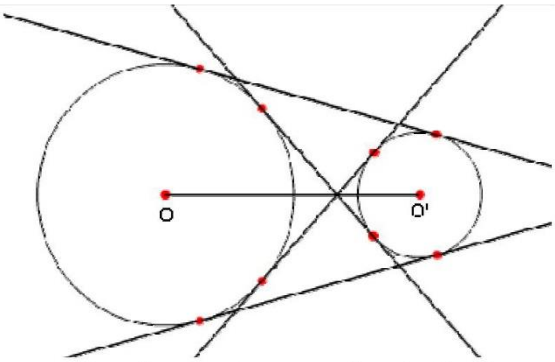
+) Đặc biệt (O) và (O') đồng tâm:



$OO' = 0$

d) Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

- Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó
- Tiếp tuyến chung ngoài không cắt đoạn nối tâm
- Tiếp tuyến chung trong cắt đoạn nối tâm



38. So sánh hai cung trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau.

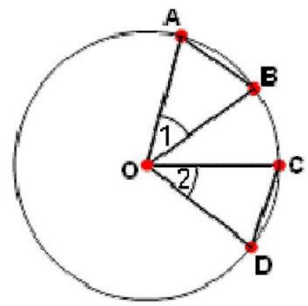
- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn
- Kí hiệu: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD};\quad \overset{\frown}{EF} > \overset{\frown}{GH} \Leftrightarrow \overset{\frown}{GH} < \overset{\frown}{EF}$

39. Liên hệ giữa cung và dây.

****) Định lí 1:***

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:
a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau
b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau

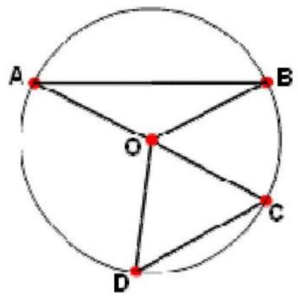
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow AB = CD$; $AB = CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



****) Định lí 2:***

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:
a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn
b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn

$\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD} \Rightarrow AB > CD$; $AB > CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$



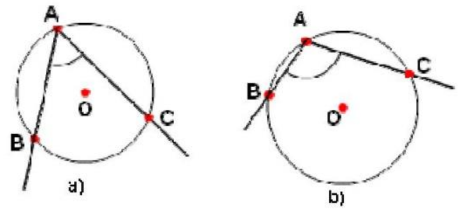
40. Góc nội tiếp

a) Định nghĩa:

- Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.
- Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn

b) Định lí:

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn



$\widehat{BAC}$ *là góc nội tiếp chắn cung nhỏ BC(hình a) và chắn cung lớn BC(hình b)*

$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđ\ \overset{\frown}{BC}$

c) Hệ quả: *Trong một đương tròn*
+) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau
+) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau

+) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung

+) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

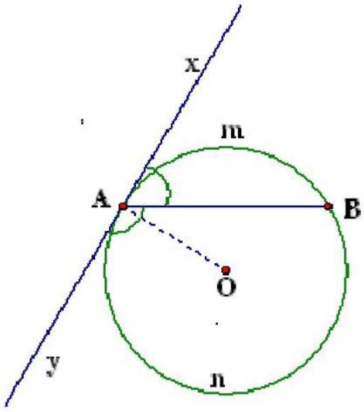
41. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

a) Khái niệm:

- Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh nằm trên đường tròn, một cạnh là một tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung của đường tròn

- Cung nằm bên trong góc là cung bị chắn

- Hình vẽ:



- ✓ $\widehat{BAx}$ *chắn cung nhỏ AmB*
- ✓ $\widehat{BAy}$ *chắn cung lớn AnB*

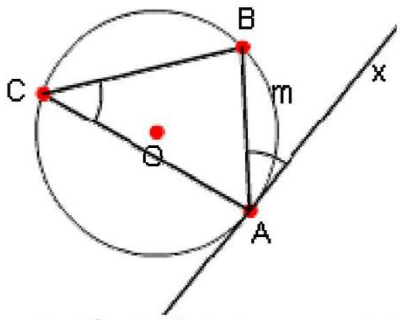
b) Định lí:

- Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn

$$\widehat{BAx} = \frac{1}{2} sđ\,\widehat{AmB}$$
$$\widehat{BAy} = \frac{1}{2} sđ\,\widehat{AnB}$$

c) Hệ quả:

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.



$$\widehat{BAx} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2} sđ\,\widehat{AmB}$$

42. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

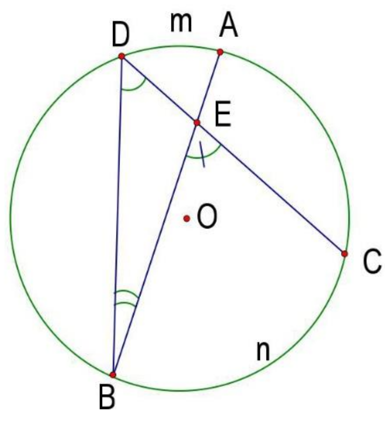
a) Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

- Góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn được gọi là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn

- Hình vẽ: $\widehat{BEC}$ *là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn chắn hai cung là* $\widehat{BnC}$, $\widehat{AmD}$

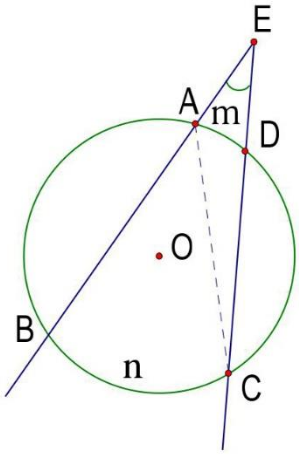
- Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn

$$\widehat{BEC} = \frac{sđ\,\widehat{BnC} + sđ\,\widehat{AmD}}{2}$$



b) Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

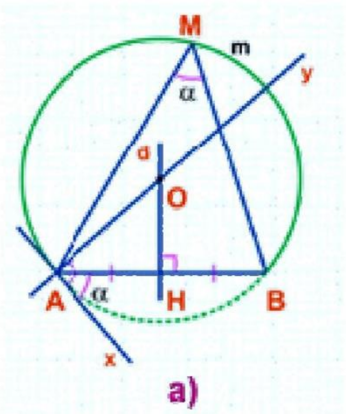
- *Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn và các cạnh đều có điểm chung với đường tròn*
- *Hai cung bị chắn là hai cung nằm bên trong góc, hình vẽ bên:* $\widehat{BEC}$ *là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, có hai cung bị chắn là* $\overset{\frown}{AmD}$ và $\overset{\frown}{BnC}$
- *Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn*



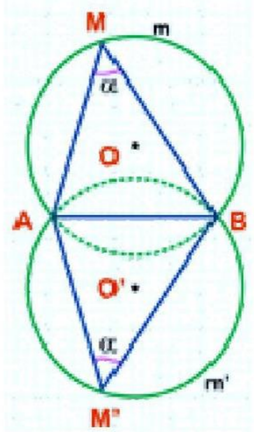
$$\widehat{BEC} = \frac{sđ\overset{\frown}{BnC} - sđ\overset{\frown}{AmD}}{2}$$

43. Kết quả bài toán quỹ tích cung chứa góc

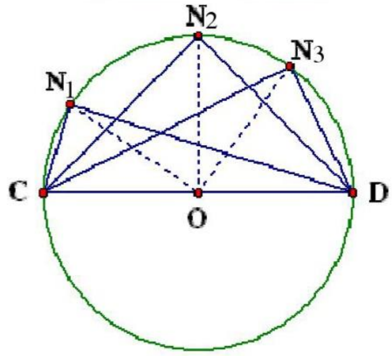
a) Bài toán: *Với đoạn thẳng AB và góc α* $(0^0 < \alpha < 180^0)$ *cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn* $\widehat{AMB} = \alpha$ *là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB*



- *Hai cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB đối xứng với nhau qua AB*



- *Khi* $\alpha = 90^0$ *thì hai cung chứa góc là hai nửa đường tròn đường kính AB, suy ra: Quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB (áp dụng kiến thức này để chứng minh tứ giác nội tiếp)*



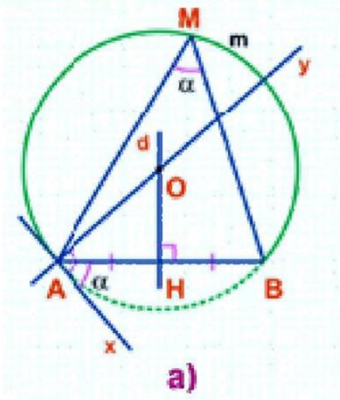
b) Cách vẽ cung chứa góc α

- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB.

- Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α ($\widehat{BAx} = \alpha$)

- Vẽ tia Ay vuông góc với tia Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d

- Vẽ cung AmB, tâm O bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax.



a)

c) Cách giải bài toán quỹ tích

*Muốn chứng minh quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất **T** là một hình H nào đó, ta chứng minh hai phần:*

*Phần thuận: Mọi điểm có tính chất **T** đều thuộc hình H*

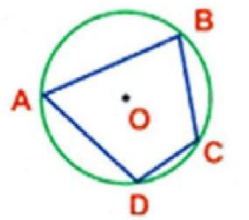
*Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất **T***

*Kết luận: Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M có tính chất **T** là hình H*

44. Tứ giác nội tiếp

a) Khái niệm tứ giác nội tiếp

- Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp)



b) Định lí:

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0

Tứ giác ABCD nội tiếp (O), suy ra:

$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^0$

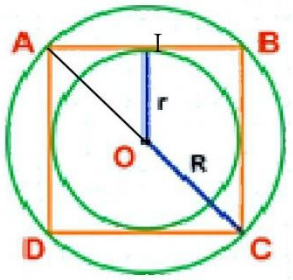
c) Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- ✓ *Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0*
- ✓ *Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện*
- ✓ *Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác*
- ✓ *Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α*

Lưu ý: Để chứng minh một tứ giác là tứ giác nội tiếp ta có thể chứng minh tứ giác đó là một trong các hình : Hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân.

45. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp

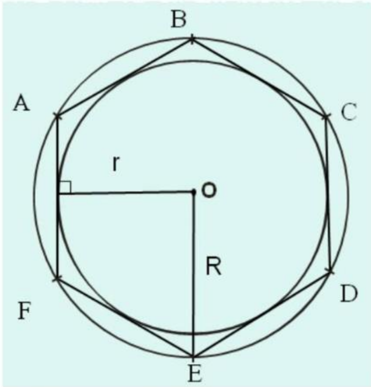
- *Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn*
- *Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn*



Hai đường tròn đồng tâm
(O; R) và (O; r) với $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

- *Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.*

- *Trong đa giác đều, tâm của đường tròn ngoại tiếp trùng với tâm của đường tròn nội tiếp và được gọi là tâm của đa giác đều.*



46. Một số định lí được áp dụng : *(không cần chứng minh)*

a) Định lí 1:

+) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền

+) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông

b) Định lí 2:

Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau

c) Định lí 3:

Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

d) Định lí 4:

Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây cung (không phải là đường kính) thì chia cung căng dây ấy thành hai cung bằng nhau

e) Định lí 5:

Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua điểm chính giữa của cung căng dây ấy.

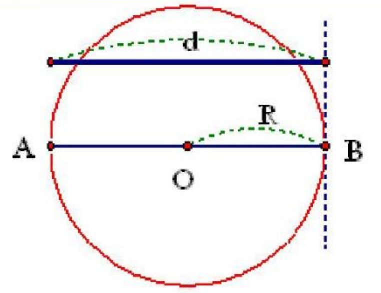
47. Độ dài đường tròn, độ dài cung tròn, diện tích hình tròn, diện tích hình quạt tròn

a) Độ dài đường tròn

Công thức tính độ dài đường tròn (chu vi hình *tròn) bán kính R là:*

$\boxed{C = 2\pi R}$ Hoặc $\boxed{C = \pi d}$

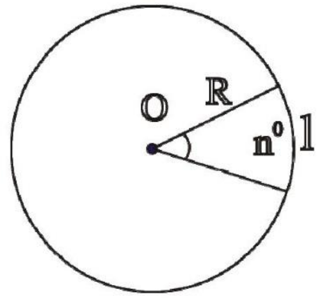
Trong đó: *C : là độ dài đường tròn*
R: là bán kính đường tròn
d: là đường kính đường tròn
$\pi \approx 3{,}1415...$ *là số vô tỉ.*



b) Độ dài cung tròn

Độ dài cung tròn n^0 là: $l = \dfrac{\pi R.n}{180}$

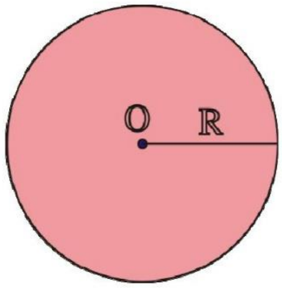
Trong đó: *l : là độ dài cung tròn n^0*
R: là bán kính đường tròn
n: là số đo độ của góc ở tâm



c) Diện tích hình tròn

$$\boxed{S = \pi . R^2}$$

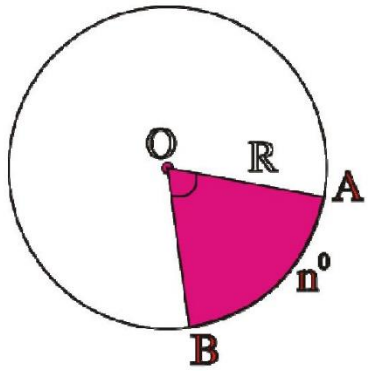
Trong đó:
S : là diện tích hình tròn .
R : là bán kính hình tròn .
$\pi \approx 3{,}14$



d) Diện tích hình quạt tròn

$\boxed{S_{quat} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}}$ Hoặc $\boxed{S_{quat} = \dfrac{\ell . R}{2}}$

Trong đó:
S là diện tích hình quạt tròn cung n^0
R là bán kính
l là độ dài cung n^0 của hình quạt tròn
$\pi \approx 3{,}14$



48. Phương pháp chứng minh một số bài toán hình học thường gặp khi ôn thi vào THPT

a) Chứng minh tam giác cân

1. *Chứng minh tam giác có hai cạnh bằng nhau*
2. *Chứng minh tam giác có hai góc bằng nhau*
3. *Chứng minh tam giác đó có đường trung tuyến vừa là đường cao*
4. *Chứng minh tam giác đó có đường cao vừa là đường phân giác ở đỉnh*

b) Chứng minh tam giác đều

1. *Chứng minh tam giác đó có ba cạnh bằng nhau*
2. *Chứng minh tam giác đó có ba góc bằng nhau*
3. *Chứng minh tam giác cân có một góc là 60^0*

c) Chứng minh một tứ giác là hình bình hành

1. *Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành*

2. Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành
3. Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành
4. Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành
5. Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành

d) Chứng minh một tứ giác là hình thang:

Ta chứng minh tứ giác đó có hai cạnh đối song song

e) Chứng minh một hình thang là hình thang cân

1. Chứng minh hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau
2. Chứng minh hình thang có hai đường chéo bằng nhau

f) Chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật

1. Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
2. Hình thanh cân có một góc vuông là hình chữ nhật
3. Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật
4. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật

g) Chứng minh một tứ giác là hình thoi

1. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau
2. Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau
3. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau
4. Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc

h) Chứng minh một tứ giác là hình vuông

1. Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau
2. Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc
3. Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc
4. Hình thoi có một góc vuông
5. Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau

i) Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

- ✓ *Phương pháp 1: Nếu hai góc của một tam giác có tổng bằng 90^0 thì tam giác đó là tam giác vuông => góc còn lại bằng 90^0 => hai đường thẳng chứa hai cạnh góc vuông là vuông góc với nhau.*
- ✓ *Phương pháp 2: Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia*
- ✓ *Phương pháp 3: Vận dụng tính chất, nếu một tam giác có một đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông => hai đường thẳng chứa hai cạnh góc vuông là vuông góc với nhau.*
- ✓ *Phương pháp 4: Vận dụng tính chất ba đường cao của tam giác,*
- ✓ *Phương pháp 5: Vận dụng hai góc kề phụ nhau (hai góc kề có tổng bằng 90^0)*
- ✓ *Phương pháp 6: Vận dụng tính chất hai cạnh kề của hình chữ nhật, hình vuông thì vuông góc với nhau*

- ✓ *<u>Phương pháp 7</u>: Vận dụng tính chất của tam giác cân Trong tam giác cân, đường phân giác, đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh đồng thời là đường cao*
- ✓ *<u>Phương pháp 8</u>: Vận dụng tính chất hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau*
- ✓ *<u>Phương pháp 9</u>: Vận dụng hai tam giác đồng dạng với nhau (hoặc hai tam giác bằng nhau), trong đó có một tam giác vuông.*
- ✓ *<u>Phương pháp 10</u>: Vận dụng tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau*
- ✓ *<u>Phương pháp 11</u>: Dựa vào định lí đảo của định lí Py - ta - go*
- ✓ *<u>Phương pháp 12</u>: Chứng minh tứ giác nội tiếp có một góc bằng 90^0, suy ra góc đối diện cũng bằng 90^0 => hai đường thẳng chứa hai cạnh của góc là vuông góc với nhau.*
- ✓ *<u>Phương pháp 13</u>: Vận dụng tính chất đường nối tâm*
- ✓ *<u>Phương pháp 14</u>: Vận dụng định nghĩa đường trung trực.*
- ✓ *<u>Phương pháp 15</u>: Sử dụng tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn bằng 90^0*
- ✓ *<u>Phương pháp 16</u>: Sử dụng tính chất đường kính của một đường tròn đi qua trung điểm của một dây cung không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy hoặc đường kính của một đường tròn đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy*
- ✓ *<u>Phương pháp 17</u>: Sử dụng tính chất tiếp tuyến của đường tròn (tiếp tuyến của đường tròn luôn luôn vuông góc với bán kính tại mút nằm trên đường tròn); tính chất tiếp tuyến chung của hai đường tròn.*
- ✓ *<u>Phương pháp 18</u>: Dây cung chung và đường nối tâm của hai đường tròn thì vuông góc với nhau*
- ✓ *<u>Phương pháp 19</u>: Sử dụng hai góc kề bù bằng nhau*
- ✓ *<u>Phương pháp 20</u>: Chứng minh một tam giác bằng một tam giác vuông*
- ✓ *<u>Phương pháp 21</u>: Sử dụng tính chất tam giác cân*
- ✓ *<u>Phương pháp 22</u>: Chứng minh bằng phản chứng*

k) Chứng minh hai đường thẳng song song với nhau

- ✓ *<u>Phương pháp 1</u>: Chứng minh hai đường thẳng chứa hai cạnh đối của hình bình hành (hoặc hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi)*
- ✓ *<u>Phương pháp 2</u>: Dựa vào dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song: Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b song song với nhau*
- ✓ *<u>Phương pháp 3</u>: Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*
- ✓ *<u>Phương pháp 4</u>: Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

- ✓ *<u>Phương pháp 5</u>: Áp dụng định lí đảo của định lí Ta - lét*
- ✓ *<u>Phương pháp 6</u>: Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác, hình thang*
- ✓ *<u>Phương pháp 7</u>: Sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng.*

m) Chứng minh hai góc bằng nhau

- ✓ *<u>Phương pháp 1</u>: Chứng minh hai góc đó là hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau*
- ✓ *<u>Phương pháp 2</u>: Chứng minh hai góc đó là hai góc tương ứng của hai tam giác đồng dạng*
- ✓ *<u>Phương pháp 3</u>: Chứng minh hai góc ở vị trí đối đỉnh*
- ✓ *<u>Phương pháp 4</u>: Nếu hai đường thẳng song song => hai góc so le trong bằng nhau, hai góc so le ngoài bằng nhau, hai góc đồng vị bằng nhau.*
- ✓ *<u>Phương pháp 5</u>: Chứng minh hai góc của cùng một tam giác cân*
- ✓ *<u>Phương pháp 6</u>: Chứng minh hai góc của cùng một tam giác đều*
- ✓ *<u>Phương pháp 7</u>: Chứng minh hai góc cùng bằng góc thứ ba*
- ✓ *<u>Phương pháp 8</u>: Chứng minh hai góc bằng với hai góc bằng nhau khác*
- ✓ *<u>Phương pháp 9</u>: Chứng minh hai góc cùng phụ hoặc cùng bù với một góc thứ ba*
- ✓ *<u>Phương pháp 10</u>: Chứng minh hai góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn hai cung bằng nhau*
- ✓ *<u>Phương pháp 11</u>: Chứng minh hai góc có số đo bằng nhau.*
- ✓ *<u>Phương pháp 12</u>: Chứng minh hai góc bằng tổng (hiệu) hai góc tương ứng bằng nhau*
- ✓ *<u>Phương pháp 13</u>: Chứng minh hai góc đó là hai góc ở đáy của hình thang cân*
- ✓ *<u>Phương pháp 14</u>: Sử dụng tính chất về góc của hình bình hành*
- ✓ *<u>Phương pháp 15</u>: Sử dụng định nghĩa tia phân giác của một góc*
- ✓ *<u>Phương pháp 16</u>: Sử dụng các góc bằng nhau cho trước và biến đổi*
- ✓ *<u>Phương pháp 17</u>: Sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng*
- ✓ *<u>Phương pháp 18</u>: Sử dụng hàm số lượng giác sin, côsin, tang, côtang.*

n) Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

- ✓ *<u>Phương pháp 1</u>: Chứng minh hai đoạn thẳng là hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau*
- ✓ *<u>Phương pháp 2</u>: Sử dụng tính chất hai đường chéo của hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường*

- ✓ *Phương pháp 3: Vận dụng tính chất hai cạnh bên của tam giác cân bằng nhau*
- ✓ *Phương pháp 4: Vận dụng tính chất ba cạnh của tam giác đều bằng nhau*
- ✓ *Phương pháp 5: Vận dụng sự bằng nhau của các cạnh đối của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi , hình vuông.*
- ✓ *Phương pháp 6: Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng một đoạn thẳng thứ ba*
- ✓ *Phương pháp 7: Chứng minh hai đoạn thẳng là hai cạnh bên của hình thang cân*
- ✓ *Phương pháp 8: Trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau, hai dây căng hai cung bằng nhau thì bằng nhau*
- ✓ *Phương pháp 9: Trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau, hai dây cách đều tâm thì bằng nhau*
- ✓ *Phương pháp 10: Vận dụng định lí, nếu một đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì nó sẽ đi qua trung điểm của cạnh thứ ba*
- ✓ *Phương pháp 11: Vận dụng định nghĩa đường trung trực của đoạn thẳng, định nghĩa trung điểm của đoạn thẳng, định nghĩa đường trung tuyến của tam giác*
- ✓ *Phương pháp 12: Chứng minh hai đoạn thẳng có cùng số đo.*
- ✓ *Phương pháp 13: Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng đoạn thẳng thứ ba.*
- ✓ *Phương pháp 14: Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng tổng, hiệu, trung bình nhân, . . . , của hai đoạn thẳng bằng nhau từng đôi một.*
- ✓ *Phương pháp 15: Sử dụng tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền, tính chất cạnh đối diện với góc 30^0 của tam giác vuông.*
- ✓ *Phương pháp 16: Sử dụng tính chất đường phân giác của một góc.*
- ✓ *Phương pháp 17: Sử dụng tính chất của hai đoạn thẳng song song bị chắn giữa bởi hai đường thẳng song song.*
- ✓ *Phương pháp 18: Chứng minh bằng phản chứng.*
- ✓ *Phương pháp 19: Sử dụng các đoạn thẳng bằng nhau cho trước rồi biến đổi.*
- ✓ *Phương pháp 20: Sử dụng định lí đường trung bình của tam giác (thuận và đảo).*
- ✓ *Phương pháp 21: Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác (tính chất của giao điểm ba đường phân giác của tam giác), tính chất của giao điểm ba đường trung trực.*
- ✓ *Phương pháp 22:*

Sử dụng bình phương của chúng bằng nhau (có thể sử dụng định lí Pitago, tam giác đồng dạng, hệ thức lượng trong tam giác, trong đường tròn để đưa về bình phương của chúng bằng nhau)

o) Chứng minh ba điểm thẳng hàng

- ✓ *Phương pháp 1: Lợi dụng hai góc kề bù*
- ✓ *Phương pháp 2: Vận dụng tiên đề ơ-clít*
  Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng, chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho (hai đường thẳng cùng đi qua hai trong ba điểm ấy cùng song song với đường thẳng thứ ba)
- ✓ *Phương pháp 3: Vận dụng tính chất:*
  Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng, chỉ có một đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho (hai đường thẳng cùng đi qua hai trong ba điểm ấy cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba)
- ✓ *Phương pháp 4: Chứng minh đường thẳng vẽ qua hai điểm đi qua điểm còn lại.*
- ✓ *Phương pháp 5: Vận dụng tính chất của hình bình hành là hai đường chéo của chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*
- ✓ *Phương pháp 6: Chứng minh ba điểm cùng thuộc một tia hoặc một đường thẳng*
- ✓ *Phương pháp 7: Chứng minh bằng phản chứng*

p) Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

- ✓ *Phương pháp 1: Dựa vào tính chất các đường đồng quy trong tam giác: Ba đường cao, ba đường trung tuyến, ba đường phân giác, ba đường trung trực.*
- ✓ *Phương pháp 2: Chứng minh giao điểm của hai đường thẳng nằm trên đường thẳng thứ ba.*
- ✓ *Phương pháp 3: Chứng minh các đường cùng đi qua một điểm cố định.*
- ✓ *Phương pháp 4: Chứng minh bằng phản chứng*

Lưu ý: Các phương pháp trên có thể được vận dụng bởi những kĩ năng khác nhau.

q) Chứng minh các điểm cùng thuộc một đường tròn

- ✓ *Phương pháp 1: Chứng minh các điểm cách đều một điểm cố định, khoảng cách đó là bán kính của đường tròn.*
- ✓ *Phương pháp 2: Nếu một điểm nhìn một đoạn thẳng dưới góc 90^0, thì theo quỹ tích cung chứa góc, điểm đó thuộc đường tròn nhận đoạn thẳng ấy là đường kính*
- ✓ *Phương pháp 3: Nếu chứng minh bốn điểm cùng thuộc một đường tròn, ta có thể chứng minh tứ giác nội tiếp*

- ✓ *Phương pháp 4: Nếu chứng minh bốn điểm cùng thuộc một đường tròn, ta có thể chứng minh bốn điểm đó là bốn đỉnh của hình vuông, hình chữ nhật, hình thang cân.*

r) *Chứng minh quỹ tích của điểm là đường tròn*

- ✓ *Bước 1: Tìm điểm cố định*
- ✓ *Bước 2: Chứng minh khoảng cách của điểm chuyển động với điểm cố định không đổi.*
- ✓ *Bước 3: Kết luận.*
  Điểm chuyển động trên đường tròn, nhận điểm cố định làm tâm, khoảng cách không đổi là bán kính.

s) *Chứng minh một tứ giác là tứ giác nội tiếp*

- ✓ *Phương pháp 1: Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0*
- ✓ *Phương pháp 2: Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện*
- ✓ *Phương pháp 3: Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác*
- ✓ *Phương pháp 4: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α*
- ✓ *Phương pháp 5: Để chứng minh một tứ giác là tứ giác nội tiếp ta có thể chứng minh tứ giác đó là một trong các hình : Hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân.*
- ✓ *Phương pháp 6: Chứng minh tổng các góc đối bằng nhau*

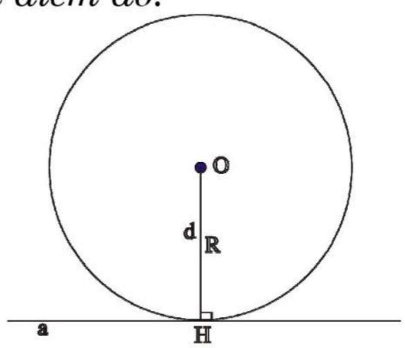
**) Thủ thuật thường gặp:*

- ✍ *Sử dụng kỹ thuật cộng góc*
- ✍ *Chứng minh tổng hai góc đối diện của tứ giác bằng tổng ba góc của một tam giác nào đó*
- ✍ *Dựa vào các tam giác đồng dạng để chứng minh góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.*
- ✍ *Để chứng minh tứ giác này nội tiếp ta cần chứng minh thông qua một tứ giác nội tiếp khác nữa.*

t) *Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn; chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến chung của hai đường tròn*

- ✓ *Phương pháp 1: Chứng minh đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.*

$$\left.\begin{array}{r} H \in (O) \\ a \perp OH \text{ tại } H \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ a là tiếp tuyến của (O)}$$

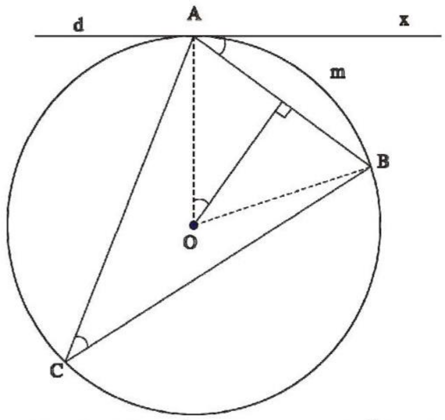


✓ *Phương pháp 2:*

Để chứng minh đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O) tại điểm A ta chứng minh góc tạo bởi đường thẳng d với dây AB nào đó bằng góc nội tiếp chắn cung AB.

Cho hình vẽ:

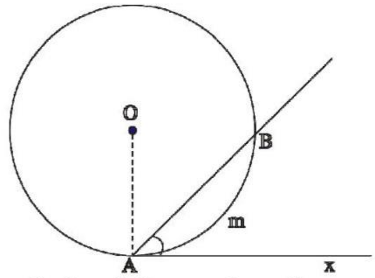
Nếu $\widehat{BAx} = \widehat{ACB}$ *thì d là tiếp tuyến của đường tròn*



✓ *Phương pháp 3: Sử dụng định lí đảo của định lí về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung*

Cho hình vẽ:

Nếu $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\widehat{AmB}$ *thì Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn*



u) *Phương pháp chứng minh một hệ thức liên hệ giữa các đoạn thẳng, các cạnh của hai tam giác, các đoạn thẳng với bán kính của đường tròn , ...*

✓ *Phương pháp 1: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông*

✓ *Phương pháp 2: Chứng hai tam giác đồng dạng*

✓ *Phương pháp 3: Vận dụng hai cặp tam giác đồng dạng để có tỉ số trung gian (nguyên tắc bắc cầu)*

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{c}{d}\\ \frac{a'}{b'} &= \frac{c}{d}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ hay } ab' = a'b$$

✓ *Phương pháp 4: Vận dụng công thức tính diện tích tam giác*

✓ *Phương pháp 5: Vận dụng định lí Py - ta - go*

✓ *Phương pháp 6: Phương pháp định lượng (tính toán hai vế)*

✓ *Phương pháp 7: Vận dụng tính chất đường phân giác trong tam giác để có tỉ số trung gian*

49. Phương pháp giải toán cực trị hình học THCS

1. Với ba điểm bất kì trong mặt phẳng (không gian) A, B, C ta có:

$AC \le AB + BC$

$AC = AB + BC \Leftrightarrow$ *A, B, C thẳng hàng và B ở giữa A và C*

$|AB - AC| \le BC$

$AC - AB = BC \Leftrightarrow$ *A, B, C thẳng hàng và B ở giữa A và C*

2. Trong số các đường xiên và đường vuông góc hạ từ một điểm đến một đường thẳng trong mặt phẳng ta có:

a) Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.

b) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn và ngược lại.

3. *Trong một tam giác, đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn và ngược lại.*
4. *Trong hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, nếu cạnh thứ ba của tam giác này lớn hơn cạnh thứ ba của tam giác kia thì góc đối diện cũng tương ứng lớn hơn và ngược lại.*
5. *Trong tất cả các đường nối liền hai điểm, đoạn thẳng nối liền hai điểm đó là ngắn nhất.*
6. *Trong tất cả các dây cung của đường tròn, đường kính là dây lớn nhất.*
7. *Trong một đường tròn, dây nào có độ dài lớn hơn thì khoảng cách từ đó đến tâm nhỏ hơn và ngược lại.*
8. *Bất đẳng thức côsi:*

   Cho a, b là hai số không âm. Ta luôn có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

   +) Nếu a + b (không đổi) $\Rightarrow$ *ab lớn nhất khi a = b.*

   +) Nếu ab (không đổi) $\Rightarrow$ *a + b nhỏ nhất khi a = b.*
9. *Một phân thức với tử và mẫu dương, có tử thức không đổi, phân thức đạt giá trị lớn nhất nếu mẫu thức đạt giá trị nhỏ nhất và phân thức đạt giá trị nhỏ nhất nếu mẫu thức đạt giá trị lớn nhất.*

PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I - Các loại phương trình

1. Phương trình bậc nhất

- Phương trình bậc nhất là phương trình có dạng $ax + b = 0\ (a \neq 0)$

- Phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$

- *Chú ý: Nếu phương trình chứa tham số ta chuyển về dạng Ax = B và xét các trường hợp sau:*
  - *Nếu* $A \neq 0$ *phương trình có nghiệm* $x = -\frac{B}{A}$
  - *Nếu* $A = 0$, $B \neq 0$ *phương trình trở thành 0.x = B => phương trình vô nghiệm*
  - *Nếu A = 0, B = 0 => phương trình vô số nghiệm*

2. Phương trình tích

- *Phương trình tích có dạng A(x).B(x) = 0*
- *Cách giải: A(x).B(x) = 0 <=> A(x) = 0 hoặc B(x) = 0*
- *Trình bày gọn : A(x).B(x) = 0 <=>* $\left[\begin{array}{l} A(x)=0 \\ B(x)=0 \end{array}\right.$
- *Mở rộng: A(x).B(x).C(x) = 0 <=>* $\left[\begin{array}{l} A(x)=0 \\ B(x)=0 \\ C(x)=0 \end{array}\right.$

3. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

- *Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu ta thực hiện theo 4 bước:*
  - ✓ *Bước 1: Tìm ĐKXĐ của phương trình*
  - ✓ *Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu*
  - ✓ *Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được*
  - ✓ *Bước 4: (kết luận)*
    Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn ĐKXĐ chính là nghiệm của phương trình đã cho, giá trị của x không thuộc ĐKXĐ là nghiệm ngoại lai (loại đi)

4. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

- *Định nghĩa:* $|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$
- *Các dạng phương trình*
  - ✓ $|f(x)| = 0 <=> f(x) = 0$
  - ✓ $|f(x)| = k(k>0) <=> f(x) = \pm k <=> \left[\begin{array}{l} f(x)=k \\ f(x)=-k \end{array}\right.$
  - ✓ $|f(x)| = |g(x)| <=> \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$

  Hoặc $|f(x)| = |g(x)| <=> [f(x)]^2 = [g(x)]^2 <=> [f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 0$, *áp dụng hằng đẳng thức hiệu hai bình phương và đưa về phương trình tích (nếu các đa thức ở hai vế là bậc nhất thì có thể khai triển ngay và không cần chuyển vế)*

✓ $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}\end{array}\right.$ *hoặc* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}\end{array}\right.$

Hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \text{ hoặc } f(x) = -g(x) \end{cases}$

Hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \end{cases}$

- *Chú ý:* $|A|^2 = A^2$; $|A| \geq \pm A$ *và* $||A| - |B|| \leq |A \pm B| \leq |A| + |B|$

5. Phương trình vô tỉ

✓ $\sqrt{f(x)} = A\,(A \geq 0) \Leftrightarrow f(x) = A^2$ *(với f(x) là một đa thức)*

✓ $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$

✓ $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

***)Lưu ý:** *Hầu hết khi giải phương trình chứa ẩn trong căn, ta cần xác định điều kiện có nghĩa của phương trình và các điều kiện tương đương. Nếu không có thể thử lại trực tiếp.*

6. Phương trình trùng phương

Phương trình trùng phương là phương trình có dạng:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

✓ *Đặt* $x^2 = t$ $(t \geq 0)$, *phương trình trùng phương trở thành phương trình bậc hai ẩn t :* $at^2 + bt + c = 0$ *(*)*

✓ *Giải phương trình (*), lấy những giá trị thích hợp thỏa mãn* $t \geq 0$

✓ *Thay vào đặt* $x^2 = t$ *và tìm x = ?*

7. Phương trình bậc cao

a) *Phương trình bậc ba dạng:* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Hướng dẫn: Nhẩm nghiệm (nếu có nghiệm nguyên thì nghiệm đó là ước của hạng tử tự do d) hoặc dùng sơ đồ Hooc- ne hoặc dùng máy tính để tìm nhanh nghiệm nguyên của phương trình, khi đã biết một nghiệm thì dễ dàng phân tích VT dưới dạng tích và giải phương trình tích (hoặc chia đa thức)

b) *Phương trình bậc bốn dạng:* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Hướng dẫn: Phương pháp tương tự như phương trình bậc ba trên

c) *Phương trình bậc bốn dạng:*

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (với $d = \left(\frac{c}{a}\right)^2$).

Phương pháp:

Với x = 0, thay vào phương trình và kiểm tra xem x = 0 có là nghiệm hay không ?

Với $x \neq 0$. Chia cả hai vế cho x^2, sau đó ta đặt $t = x + \frac{c}{ax}$

d) *Phương trình bậc 4 dạng:*

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = k$ (với $a + b = c + d = m$)

Phương pháp: Đặt $t = x^2 + mx + \frac{ab + cd}{2}$

e) *Phương trình bậc bốn dạng:*

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = kx^2$ (với $ab = cd = k$)

Phương pháp:

Chia cả hai vế cho x^2. Đặt $t = x + \frac{k}{x}$

II- Bất phương trình bậc nhất một ẩn

1) Định nghĩa:

Một bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$) với $a \neq 0$ được gọi là một bất phương trình bậc nhất một ẩn

2) Cách giải: $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$

Nếu $a > 0$ thì $x > -\frac{b}{a}$

Nếu $a < 0$ thì $x < -\frac{b}{a}$

3) Kiến thức có liên quan:

- Hai bất phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm và dùng kí hiệu <=> để chỉ sự tương đương đó
- Quy tắc chuyển vế: Khi chuyển một hạng tử (là số hoặc đa thức) từ vế này sang vế kia của bất phương trình ta phải đổi dấu hạng tử đó => ta có thể xóa hai hạng tử giống nhau ở hai vế
- Quy tắc nhân: Khi nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải: Giữ nguyên chiều BPT nếu số đó dương; đổi chiều BPT nếu số đó âm.

4) Tính chất cơ bản của bất đẳng thức

- Với mọi số thực a, b, c ta có : $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

- Với mọi số thực a, b, c, d ta có : $a > b, b > c \Rightarrow a > c$ (t/c bắc cầu)

$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$

$a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > b$

- Với mọi số thực a, b, c,

+ Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$

+ Nếu c < 0 thì a > b <=> ac < bc

- Với a, b là hai số thực : a > b <=> $\sqrt{a^3} > \sqrt{b^3}$ *và a > b <=>* $a^3 > b^3$

- Nếu $a \geq 0, b \geq 0$ *thì a > b <=>* $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ *và a > b <=>* $a^2 > b^2$

- Giá trị tuyệt đối của một biểu thức A

$$|A| = \begin{cases} A, \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A, \text{ nếu } A < 0. \end{cases}$$

Ta có: $A^2 \geq 0$, $|A| \geq 0$, $\sqrt{A^2} = |A|$

- Bất đẳng thức Cô - si: Cho a, b là hai số thực không âm, ta có:

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ *Dấu "=" xảy ra <=> a = b*

III – Các dạng bài tập có liên quan đến biểu thức hữu tỉ, căn bậc hai, căn bậc ba.

1. Dạng 1 : Rút gọn và tính giá trị các biểu thức hữu tỉ

- Khi thực hiện rút gọn một biểu thức hữu tỉ ta phải tuân theo thứ tự thực hiện các phép toán : Nhân chia trước, cộng trừ sau. Còn nếu biểu thức có các dấu ngoặc thì thực hiện theo thứ tự ngoặc tròn, ngoặc vuông, ngoặc nhọn.

- Với những bài toán tìm giá trị của phân thức thì phải tìm điều kiện của biến để phân thức được xác định (mẫu thức phải khác 0)

2. Dạng 2 : Tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa

- Biểu thức có dạng $\dfrac{A}{B}$ *xác định (có nghĩa) khi* $B \neq 0$

- Biểu thức có dạng $\sqrt{A}$ *xác định (có nghĩa) khi* $A \geq 0$

- Biểu thức có dạng $\dfrac{A}{\sqrt{B}}$ *xác định (có nghĩa) khi B > 0*

- Biểu thức có dạng $\sqrt{A} + \dfrac{B}{\sqrt{C}}$ *xác định (có nghĩa) khi* $\begin{cases} A \geq 0 \\ C > 0 \end{cases}$

- Biểu thức có dạng $\sqrt{A} + \dfrac{B}{C}$ *xác định (có nghĩa) khi* $\begin{cases} A \geq 0 \\ C \neq 0 \end{cases}$

3. Dạng 3 : Rút gọn các biểu thức chứa căn bậc hai, căn bậc ba

LÍ THUYẾT CHUNG:

a) Các công thức biến đổi căn thức

1) $\sqrt{A^2} = |A|$

2) $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$)

3) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với $A \geq 0$ và $B > 0$)

4) $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (với $B \geq 0$)

5) $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$)

$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (với $A < 0$ và $B \geq 0$)

6) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ (với $AB \geq 0$ và $B \neq 0$)

7) $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$)

8) $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \dfrac{C\left(\sqrt{A} \mp B\right)}{A - B^2}$ (với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$)

9) $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{C\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right)}{A - B}$ (với $A \geq 0$, $B \geq 0$ và $A \neq B$)

10) $\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = a$ *và ta có :* $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$

11) $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

12) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$

13) Với $b \neq 0$*, ta có:* $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

**) <u>Lưu ý</u>:*

Để rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai ta làm như sau :

- *Quy đồng mẫu số chung (nếu có)*
- *Đưa bớt thừa số ra ngoài dấu căn (nếu có)*
- *Trục căn thức ở mẫu (nếu có)*
- *Thực hiện các phép tính lũy thừa, khai căn, nhân, chia , … theo thứ tự đã biết để làm xuất hiện các căn thức đồng dạng*
- *Cộng, trừ các biểu thức đồng dạng (các căn thức đồng dạng)*

b) Các hằng đẳng thức quan trọng, đáng nhớ:

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a.b} + b$ $(a, b \geq 0)$

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a.b} + b$ $(a, b \geq 0)$

3) $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$

$a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b}).(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ $(a, b \geq 0)$

4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = \sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} = \left(\sqrt{a}\right)^3 + \left(\sqrt{b}\right)^3 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)$ $(a, b \geq 0)$

7) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)\quad (a,b\ge 0)$$

8) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

9) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}\quad (a,b,c\ge 0)$

10) $\sqrt{a^2}=|a|$

PHÂN DẠNG BÀI TẬP CHI TIẾT

Dạng 3.1 : Tính – Rút gọn biểu thức không có điều kiện

Dạng 3.2 : Rút gọn biểu thức có điều kiện

Dạng 3.3 : Tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến

Dạng 3.4 : Tìm giá trị của biến khi biết giá trị của biểu thức

Dạng 3.5 : Tìm giá trị nguyên của biến để biểu thức nhận giá trị nguyên

Dạng 3.6 : Tìm giá trị của biến khi biết dấu của biểu thức

Dạng 3.7 : Chứng minh bất đẳng thức sau khi đã rút gọn

Dạng 3.8 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

Dạng 3.9 : Bài tập tổng hợp

IV – Các dạng toán về hàm số

LÍ THUYẾT CHUNG

1) **Khái niệm về hàm số (khái niệm chung).**

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x được gọi là biến số.

**) Ví dụ:* $y = 2x$; $y = -3x + 5$; $y = 2x + \sqrt{3}$; ...

**) Chú ý:*

Khi đại lượng x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì y được gọi là hàm hằng.

**) Ví dụ: Các hàm hằng* $y = 2$; $y = -4$; $y = 7$; ...

2) **Các cách thường dùng cho một hàm số**

a) ***Hàm số cho bởi bảng.***

b) ***Hàm số cho bởi công thức.***

- *Hàm hằng: là hàm có công thức* $\boxed{y = m}$ *(trong đó x là biến,* $m \in \mathbb{R}$*)*
- *Hàm số bậc nhất: Là hàm số có dạng công thức* $y = ax + b$

  Trong đó: x là biến, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

  a là hê số góc, b là tung độ gốc.

Chú ý: Nếu b = 0 thì hàm bậc nhất có dạng $y = ax$ $(a \neq 0)$

- *Hàm số bậc hai: Là hàm số có công thức* $y = ax^2 + bx + c$

  (trong đó x là biến, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$*).*

Chú ý: Nếu c = 0 thì hàm bậc hai có dạng $y = ax^2 + bx$ $(a \neq 0)$

Nếu b = 0 và c = 0 thì hàm bậc hai có dạng $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

3) Khái niệm hàm đồng biến và hàm nghịch biến.

Cho hàm số $y = f(x)$ *xác định với mọi* $x \in \mathbb{R}$. *Với* x_1, x_2 *bất kì thuộc R*

a) *Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị tương ứng f(x) cũng tăng lên thì hàm số y = f(x) được gọi là hàm đồng biến.*

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ *thì hàm số y = f(x) đồng biến trên R*

b) *Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị tương ứng f(x) giảm đi thì hàm số y = f(x) được gọi là hàm nghịch biến.*

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ *thì hàm số y = f(x) nghịch biến /R*

4) Dấu hiệu nhận biết hàm đồng biến và hàm nghịch biến.

a) *Hàm số bậc nhất* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

- *Nếu a > 0 thì hàm số y = ax + b luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$.
- *Nếu a < 0 thì hàm số y = ax + b luôn nghịch biến trên* $\mathbb{R}$.

b) *Hàm bậc hai một ẩn số* $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ *có thể nhận biết đồng biến và nghịch biến theo dấu hiệu sau:*

- *Nếu a > 0 thì hàm đồng biến khi x > 0, nghịch biến khi x < 0.*
- *Nếu a < 0 thì hàm đồng biến khi x < 0, nghịch biến khi x > 0.*

5) Khái niệm về đồ thị hàm số.

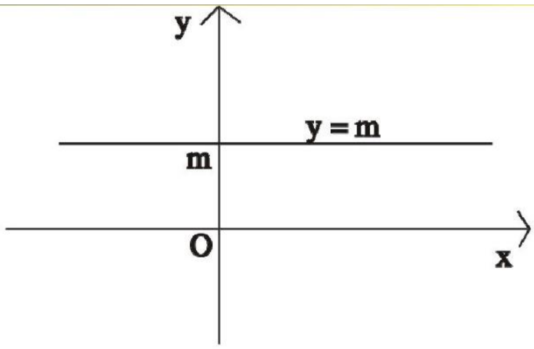
Đồ thị của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng (x; f(x)) trên mặt phẳng toạ độ.

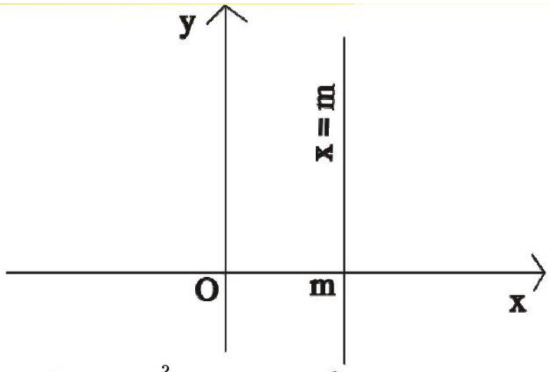
Chú ý: Dạng đồ thị:

a) *Hàm hằng.*

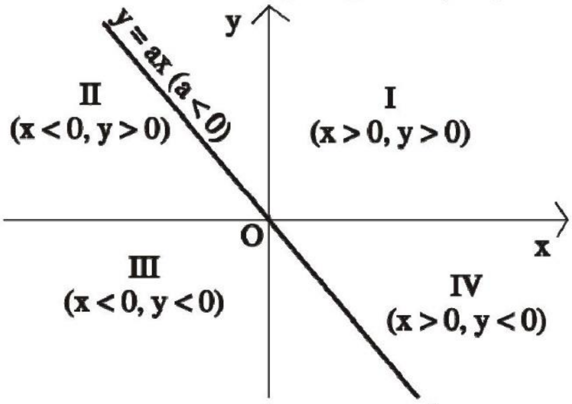
Đồ thị của hàm hằng y = m (trong đó x là biến, $m \in \mathbb{R}$*) là một đường thẳng luôn song song với trục Ox.*

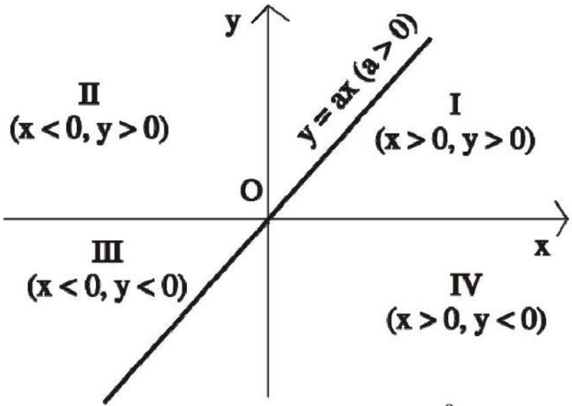
Đồ thị của hàm hằng x = m (trong đó y là biến, $m \in \mathbb{R}$*) là một đường thẳng luôn song song với trục Oy.*





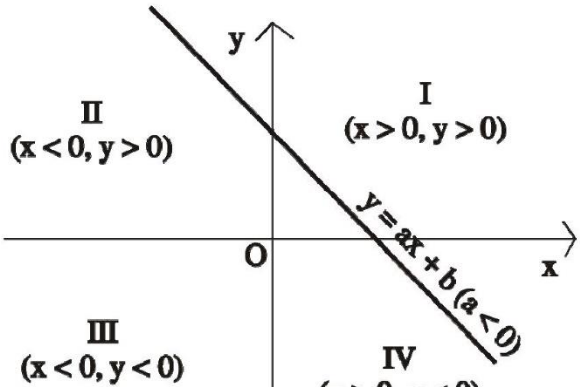
b) *Đồ thị hàm số y = ax ($a \neq 0$) là một đường thẳng (hình ảnh tập hợp các điểm) luôn đi qua gốc toạ độ.*

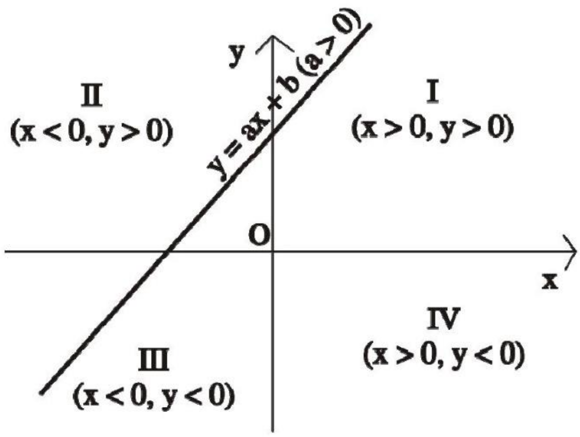




*) *<u>Cách vẽ</u>: Lấy một điểm thuộc đồ thị khác O(0 ; 0), chẳng hạn điểm A(1 ; a). Sau đó vẽ đường thẳng đi qua hai điểm O(0 ; 0) và A(1 ; a) ta được đồ thị hàm số y = ax ($a \neq 0$)*

c) *Đồ thị hàm số y = ax + b ($a, b \neq 0$) là một đường thẳng (hình ảnh tập hợp các điểm) cắt trục tung tại điểm (0; b) và cắt trục hoành tại điểm ($\frac{-b}{a}$, 0).*





*) *<u>Cách vẽ</u>: Có hai cách vẽ cơ bản*

+) *Cách 1: Xác định hai điểm bất kì nào đó thuộc đồ thị, chẳng hạn như sau:*

Cho x = 1 => y = a + b, ta được A(1 ; a + b)

Cho x = -1 => y = - a + b, ta được A(-1 ; - a + b)

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B ta được đồ thị hàm số y = ax + b ($a, b \neq 0$)

+) *Cách 2: Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ, cụ thể:*

Cho $x = 0 \Rightarrow y = b$, ta được $M(0\ ;\ b) \in Oy$

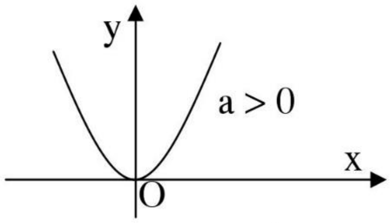
Cho $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$, ta được $N(-\frac{b}{a};\ 0) \in Ox$

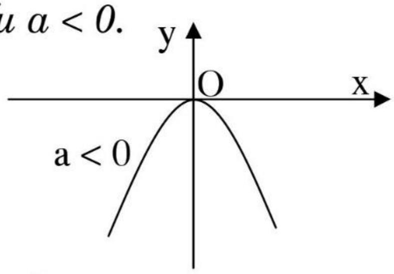
Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm M và N ta được đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a, b \neq 0$)

d) *Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong Parabol có đỉnh O(0;0). Nhận trục Oy làm trục đối xứng*

- Đồ thị ở phía trên trục hoành nếu $a > 0$.

- Đồ thị ở phía dưới trục hoành nếu $a < 0$.





6) Vị trí tương đối của hai đường thẳng

***)** *Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$)*

+ *Trùng nhau nếu $a = a'$, $b = b'$.*

+ *Song song với nhau nếu $a = a'$, $b \neq b'$.*

+ *Cắt nhau nếu $a \neq a'$.*

+ *Vuông góc nếu $a.a' = -1$.*

***)** *Hai đường thẳng $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ ($a, b, c, a', b', c' \neq 0$)*

+ *Trùng nhau nếu* $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

+ *Song song với nhau nếu* $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

+ *Cắt nhau nếu* $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

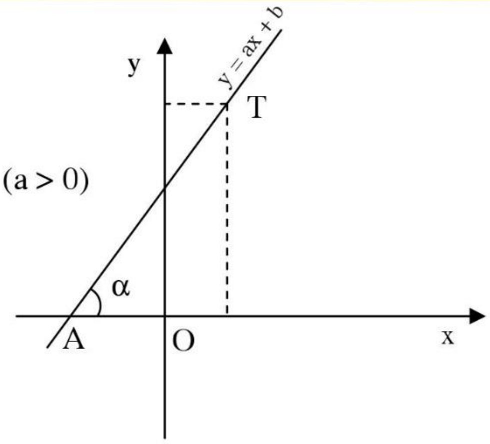
7) Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox

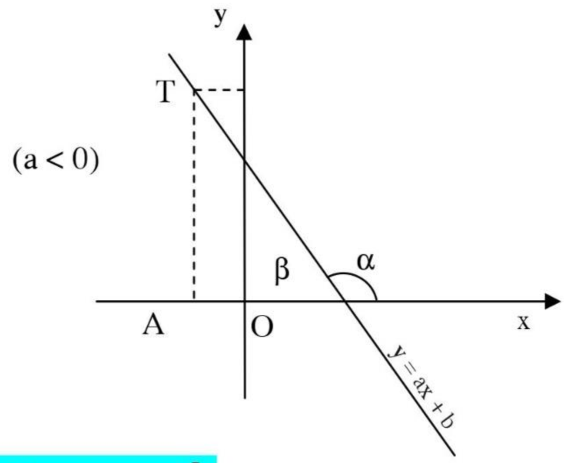
Giả sử đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) cắt trục Ox tại điểm A.

Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là góc tạo bởi tia Ax và tia AT (với T là một điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ có tung độ dương).

- *Nếu $a > 0$ thì góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox được tính theo công thức như sau:* $\boxed{tg\alpha = a}$ *(cần chứng minh mới được dùng).*
- *Nếu $a < 0$ thì góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox được tính theo công thức như sau:*

$\boxed{\alpha = 180^0 - \beta}$ *với* $tg\beta = |a|$ *(cần chứng minh mới được dùng).*





PHÂN DẠNG BÀI TẬP CHI TIẾT

Dạng 1: Nhận biết hàm số

Dạng 2: Tính giá trị của hàm số, biến số.

Dạng 3: Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến.

a) *Hàm số bậc nhất* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

- *Nếu* $a > 0$ *thì hàm số* $y = ax + b$ *luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$.
- *Nếu* $a < 0$ *thì hàm số* $y = ax + b$ *luôn nghịch biến trên* $\mathbb{R}$.

b) *Hàm bậc hai một ẩn số* $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ *có thể nhận biết đồng biến và nghịch biến theo dấu hiệu sau:*

- *Nếu* $a > 0$ *thì hàm đồng biến khi* $x > 0$, *nghịch biến khi* $x < 0$.
- *Nếu* $a < 0$ *thì hàm đồng biến khi* $x < 0$, *nghịch biến khi* $x > 0$.

Dạng 4: Vẽ đồ thị hàm số

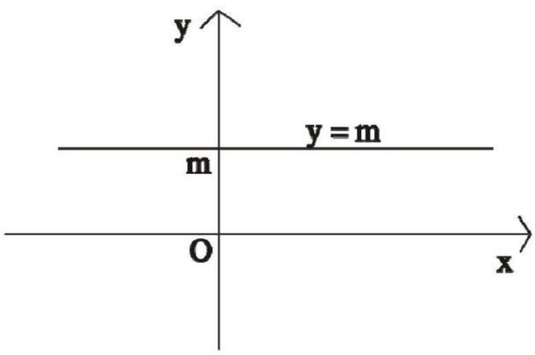
Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ *là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng* $(x; f(x))$ *trên mặt phẳng toạ độ.*

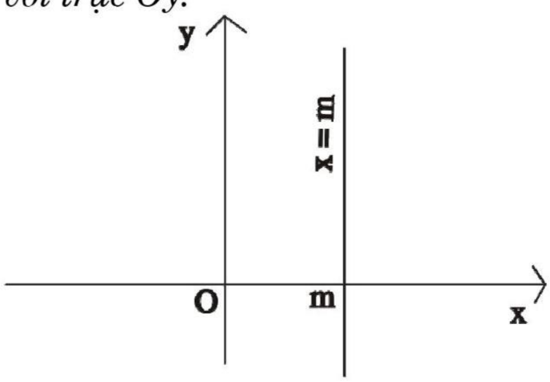
Chú ý: Dạng đồ thị:

a) *Hàm hằng.*

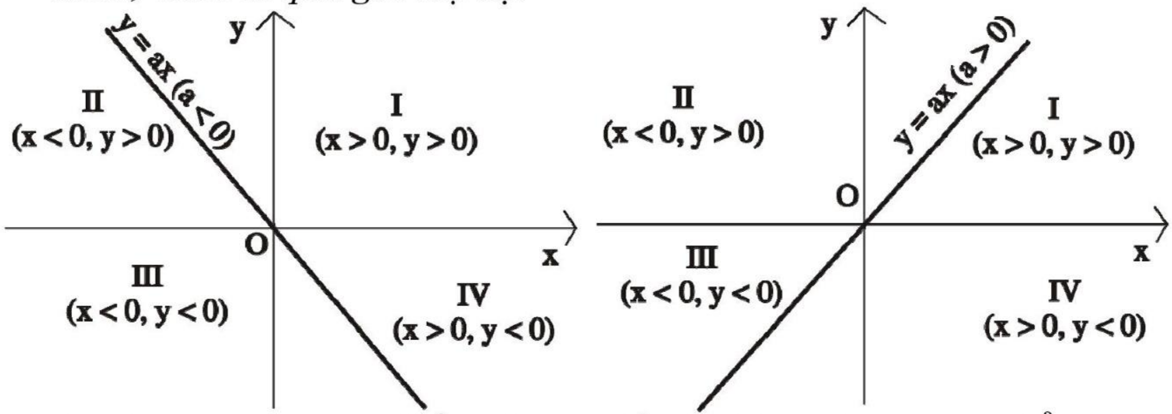
Đồ thị của hàm hằng $y = m$ *(trong đó* x *là biến,* $m \in \mathbb{R}$*) là một đường thẳng luôn song song với trục Ox.*

Đồ thị của hàm hằng $x = m$ *(trong đó* y *là biến,* $m \in \mathbb{R}$*) là một đường thẳng luôn song song với trục Oy.*



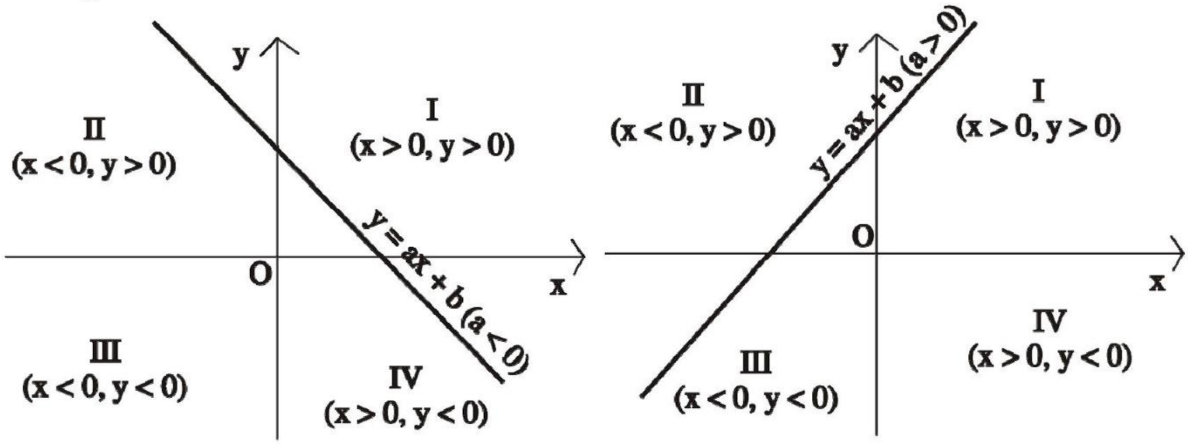


b) *Đồ thị hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng (hình ảnh tập hợp các điểm) luôn đi qua gốc toạ độ.*



**) <u>Cách vẽ</u>: Lấy một điểm thuộc đồ thị khác O(0 ; 0), chẳng hạn điểm A(1 ; a). Sau đó vẽ đường thẳng đi qua hai điểm O(0 ; 0) và A(1 ; a) ta được đồ thị hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$*

c) *Đồ thị hàm số $y = ax + b$ $(a, b \neq 0)$ là một đường thẳng (hình ảnh tập hợp các điểm) cắt trục tung tại điểm (0; b) và cắt trục hoành tại điểm $(\frac{-b}{a}, 0)$.*



**) <u>Cách vẽ</u>: Có hai cách vẽ cơ bản*

+) Cách 1: Xác định hai điểm bất kì nào đó thuộc đồ thị, chẳng hạn như sau:

Cho x = 1 => y = a + b, ta được A(1 ; a + b)

Cho x = -1 => y = - a + b, ta được A(-1 ; - a + b)

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B ta được đồ thị hàm số $y = ax + b$ $(a, b \neq 0)$

+) Cách 2: Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ, cụ thể:

Cho x = 0 => y = b, ta được $M(0 ; b) \in Oy$

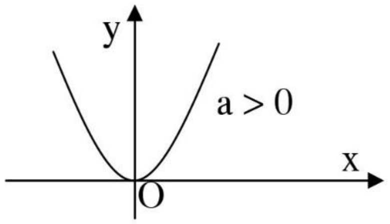
Cho y = 0 => $x = -\frac{b}{a}$, ta được $N(-\frac{b}{a}; 0) \in Ox$

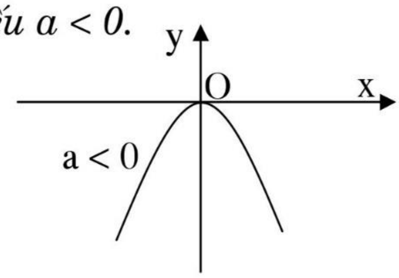
Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm M và N ta được đồ thị hàm số $y = ax + b$ $(a, b \neq 0)$

d) *Đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một đường cong Parabol có đỉnh O(0;0). Nhận trục Oy làm trục đối xứng*

- Đồ thị ở phía trên trục hoành nếu $a > 0$.

- Đồ thị ở phía dưới trục hoành nếu $a < 0$.





Dạng 5: Điểm thuộc và không thuộc đồ thị hàm số.

*) Điểm thuộc đường thẳng.

- Điểm $A(x_A; y_A) \in (d): y = ax + b\ (a \neq 0)$ khi và chỉ khi $y_A = ax_A + b$
- Điểm $B(x_B; y_B) \in (d): y = ax + b\ (a \neq 0)$ khi và chỉ khi $y_B = ax_B + b$

*) Điểm thuộc Parabol : Cho (P) $y = ax^2\ \ (a \neq 0)$

- Điểm $A(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = ax_0^2$.
- Điểm $B(x_1; y_1) \notin (P) \Leftrightarrow y_1 \neq ax_1^2$.

Dạng 6: Xác định hàm số

Dạng 7: Xác định điểm cố định của hàm số

*) Phương pháp:

Để tìm điểm cố định mà đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$; a,b có chứa tham số) luôn đi qua với mọi giá trị của tham số m, ta làm như sau:

- ✓ *Bước 1:* Gọi điểm cố định là $A(x_0; y_0)$ mà đường thẳng $y = ax + b$ luôn đi qua với mọi giá trị của tham số m
- ✓ *Bước 2:* Thay $x = x_0$; $y = y_0$ vào hàm số được $y_0 = ax_0 + b$, ta biến đổi về dạng <=> $A(x_0, y_0).m + B(x_0, y_0) = 0$, đẳng thức này luôn đúng với mọi giá trị của tham số m hay phương trình có vô số nghiệm m
- ✓ *Bước 3:* Đặt điều kiện để phương trình có vô số nghiệm.

$$\left(A(x_0, y_0).m + B(x_0, y_0) = 0,\ \text{có vô số nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x_0, y_0) = 0 \\ B(x_0, y_0) = 0 \end{cases}\right)$$

Dạng 8: Tìm giao điểm của hai đồ thị

8.1: Tìm giao điểm của hai đường thẳng.

Giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): y = a_1x + b_1$; $(d_2): y = a_2x + b_2$

Là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$

8.2: Tìm toạ độ giao điểm của Parabol với đường thẳng.

Cho (P) : $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ và (d) : $y = mx + n$.

- ✓ Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 = mx + n$.
- ✓ Giải phương trình tìm x.

✓ Thay giá trị x vừa tìm được vào hàm số $y = ax^2$ hoặc $y = mx + n$ ta tìm được y.

+ Giá trị của x tìm được là hoành độ giao điểm.

+ Giá trị của y tìm được là tung độ giao điểm.

8.3: Tìm số giao điểm của đường thẳng và Parabol.

Cho (P) : $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ và (d) : $y = mx + n$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 = mx + n$. (*)

+ Phương trình (*) vô nghiệm ($\Delta < 0$) $\Leftrightarrow$ (d) và (P) không có điểm chung.

+ Phương trình (*) có nghiệm kép ($\Delta = 0$) $\Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc với (P).

+ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt ($\Delta > 0$ hoặc $ac < 0$) $\Leftrightarrow$ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

8.4: Tìm giá trị của một tham số khi biết giao điểm của hai đường thẳng.

8.5: Tìm giá trị của 2 tham số khi biết giao điểm của hai đường thẳng.

8.6: Tìm giá trị của tham số khi biết số giao điểm của Parabol và đường thẳng.

Cho (d) : $y = ax + b$ và (P): $y = a'x^2$ $(a' \neq 0)$(a', a, b có chứa tham số)

Xét phương trình hoành độ giao điểm $a'x^2 = ax + b$. (*)

+ (d) và (P) không có điểm chung

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm ($\Delta < 0$)

+ (d) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm kép ($\Delta = 0$).

Nghiệm kép là hoành độ điểm tiếp xúc

+ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt ($\Delta > 0$ hoặc $ac < 0$). Hai nghiệm đó là hoành độ của hai giao điểm

8.7: Tìm giá trị của tham số khi biết toạ độ giao điểm của Parabol và đường thẳng.

Cho (d): $y = ax + b$ và (P): $y = a'x^2$ $(a' \neq 0)$

(a', a, b có chứa tham số)

Tìm giá trị của tham số để (d) và (P) cắt nhau tại $A(x_A; y_A)$.

Cách làm: Thay tọa độ của A vào hàm số của (d); (P) để tìm giá trị của tham số.

Dang 9: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

9.1: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_A \neq x_B$ và $y_A \neq y_B$.

Phương pháp:

Gọi phương trình đường thẳng (d) cần lập đi qua A và B có dạng

$y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

Do $A \in (d)$ thay $x = x_A$; $y = y_A$ vào $y = ax + b$ ta có $y_A = ax_A + b$ $^{(1)}$

Do $B \in (d)$ thay $x = x_B$; $y = y_B$ vào $y = ax + b$ ta có $y_B = ax_B + b$ $^{(2)}$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$

Giải hệ phương trình này tìm được a, b và suy ra phương trình đường thẳng (d) cần lập

9.2: Lập phương trình đường thẳng đi qua M(x_0 ; y_0) và có hệ số góc là k.

- ✓ Bước 1: Phương trình đường thẳng có hệ số góc k có dạng

  y = kx + b
- ✓ Bước 2: Đường thẳng này đi qua M(x_0 ; y_0) => $y_0 = kx_0 + b$

  => $b = y_0 - kx_0$
- ✓ Bước 3: Phương trình đường thẳng cần tìm là y = $kx + y_0 - kx_0$

9.3: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A(m; y_A) và B(m; y_B) trong đó $y_A \neq y_B$.

Phương pháp:

Do A(m; y_A) $\in$ (d): x = m;
Do B(m; y_B) $\in$ (d) : x = m;
Vậy phương trình đường thẳng cần lập là: (d): x = m

9.4: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A(x_A; n) và B(x_B; n) trong đó $x_A \neq x_B$.

Phương pháp:

Do A(x_A; n) $\in$ (d): y = n;
Do B(x_B; n) $\in$ (d) : y = n;
Vậy phương trình đường thẳng cần lập là: (d): y = n

9.5: Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm A(x_A ; y_A) và tiếp xúc với đường cong $y = ax^2 \ (a \neq 0)$

- ✓ Bước 1: Giả sử phương trình cần lập là y = a'x + b'
- ✓ Bước 2: Đường thẳng này tiếp xúc với đường cong $y = ax^2 \ (a \neq 0)$ khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 = a'x + b'$ có nghiệm kép. Ta cho $\Delta = 0$, tìm ra một hệ thức giữa a' và b' (1)
- ✓ Bước 3: Đường thẳng đi qua A(x_A ; y_A) => $y_A = a'x_A + b'$ (2)
- ✓ Bước 4: Từ (1) và (2) ta có một hệ phương trình hai ẩn là a' và b'. Giải hệ tìm được a' và b' => phương trình cần lập

9.6: Lập phương trình đường thẳng có hệ số góc là k và tiếp xúc với đường cong $y = ax^2 \ (a \neq 0)$

- ✓ Bước 1: Phương trình đường thẳng cần tìm giả sử là y = ax + b
  Vì đường thẳng có hệ số góc là k nên a = k => y = kx + b
- ✓ Bước 2: Đường thẳng y = kx + b tiếp xúc với đường cong $y = ax^2 \ (a \neq 0)$ <=> phương trình hoành độ giao điểm

  $kx + b = ax^2 \Leftrightarrow ax^2 - kx - b = 0$ có nghiệm kép

Cho $\Delta = 0 (\Delta' = 0)$ => b = ?

- ✓ Bước 3: Trả lời

Dạng 10: Ba điểm thẳng hàng

10.1: Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

- ✓ Bước 1: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.
- ✓ Bước 2: Chứng minh điểm còn lại thuộc đường thẳng vừa lập.

10.2: Tìm giá trị của tham số để ba điểm thẳng hàng.

- ✓ Bước 1: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm có toạ độ đơn giản nhất.
- ✓ Bước 2: Thay toạ độ của điểm còn lại vào phương trình đường thẳng vừa lập. Giải phương trình và tìm tham số.

Dạng 11: Ba đường thẳng đồng qui

11.1: Chứng minh ba đường thẳng đồng qui.

- ✓ Bước 1: Tìm giao điểm của hai đường thẳng.
- ✓ Bước 2: Chứng minh giao điểm đó thuộc đường thẳng còn lại.

11.2: Tìm giá trị của tham số để ba đường thẳng đồng qui.

- ✓ Bước 1: Tìm giao điểm của hai đường thẳng đơn giản nhất.
- ✓ Bước 2: Thay toạ độ giao điểm trên vào phương trình đường thẳng còn lại. Giải phương trình và tìm tham số.

Dạng 12: Vị trí tương đối của hai đồ thị của hai hàm số

12.1: Vị trí tương đối của hai đồ thị của hai hàm số bậc nhất

Cho hai đường thẳng : (d_1): $y = a_1x + b_1$; (d_2): $y = a_2x + b_2$

+) (d_1) cắt (d_2) $\Leftrightarrow$ $a_1 \neq a_2$

+) $(d_1) // (d_2)$ $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2$

+) $(d_1) \equiv (d_2)$ $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$

+) $(d_1) \perp (d_2)$ $\Leftrightarrow$ $a_1.a_2 = -1$ (phải chứng minh mới được dùng)

12.2: Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

Cho (d_1): $y = a_1x + b_1$ và (d_2): $y = a_2x + b_2$

Để (d_1) cắt (d_2) tại một điểm trên trục tung thì $\begin{cases} a_1 \neq a_2 & (1) \\ b_1 = b_2 & (2) \end{cases}$

Giải (1)

Giải (2) và chọn những giá trị thoả mãn (1).

12.3: Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

Cho (d_1): $y = a_1x + b_1$ và (d_2): $y = a_2x + b_2$

Để (d_1) cắt (d_2) tại một điểm trên trục hoành thì $\begin{cases} a_1 \neq a_2 & (1) \\ \dfrac{-b_1}{a_1} = \dfrac{-b_2}{a_2} & (2) \end{cases}$

Lưu ý: Chỉ nên áp dụng khi hai phương trình đều chứa tham số.

Dạng 13: Xác định giá trị của tham số m để đường thẳng y = ax + b cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tạo thành một tam giác có diện tích bằng c

- ✓ Bước 1: Để đồ thị hàm số y = ax + b cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác thì ta có điều kiện cần là: $a \neq 0, b \neq 0$ => điều kiện của m
- ✓ Bước 2: Tìm giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ; giả sử A và B lần lượt là giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành
  - ⇨ A(0 ; b) và B($\frac{-b}{a};0$)
- ✓ Bước 3: Xét tam giác vuông OAB có

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\cdot|b|.\left|\frac{-b}{a}\right| = c$$

=> m = ? (kiểm tra với điều kiện ở bước 1)

Dạng 14: Xác định giá trị của tham số m để đường thẳng y = ax + b cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tạo thành một tam giác cân

Cách 1:

- ✓ Bước 1: Để đồ thị hàm số y = ax + b cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác thì ta có điều kiện cần là: $a \neq 0, b \neq 0$
  => điều kiện của m
- ✓ Bước 2: Tìm giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ; giả sử A và B lần lượt là giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành
  - ⇨ A(0 ; b) và B($\frac{-b}{a};0$)
- ✓ Bước 3: Tam giác OAB cân <=> OA = OB <=> $|b| = \left|\frac{-b}{a}\right|$ (*)

Giải phương trình (*) ta tìm được giá trị của m (kiểm tra điều kiện ở bước1)

Cách 2: Đồ thị hàm số cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác cân khi và chỉ khi đường thẳng y = ax + b song song với đường thẳng y = x hoặc song song với đường thẳng y = - x

Dạng 15: Xác định giá trị của tham số để giao điểm của hai đường thẳng ax + by = c và a'x + b'y = c' nằm trong các góc phần tư của hệ trục tọa độ.

- ✓ Bước 1: Tìm tọa độ giao điểm A(x ; y) của hai đường thẳng, chính là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
- ✓ Bước 2:

  +) Nếu A nằm trong góc phần tư thứ I thì điều kiện là: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

  +) Nếu A nằm trong góc phần tư thứ II thì điều kiện là: $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

+) Nếu A nằm trong góc phần tư thứ III thì điều kiện là: $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

+) Nếu A nằm trong góc phần tư thứ IV thì điều kiện là: $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

✓ Bước 3: Tìm m = ?

Dạng 16:

Xác định giá trị tham số để đa thức f(x) = Ax + B bằng đa thức 0

✓ Bước 1: Đa thức f(x) = Ax + B bằng đa thức 0 <=> $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

✓ Bước 2: Giải hệ này tìm được giá trị của tham số

V - Các dạng toán về hệ phương trình

LÍ THUYẾT CHUNG

1. *Định nghĩa:*
Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là:

$$(I)\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$ *(trong đó a, b, c, a', b', c' có thể chứa tham số)*

2. *Định nghĩa nghiệm, tập nghiệm*

- Nghiệm (x_0 ; y_0) của hệ (I) là nghiệm chung của hai phương trình trong hệ

- Nếu hai phương trình trong hệ không có nghiệm chung thì hệ phương trình vô nghiệm

- Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm (tìm tập nghiệm) của nó.

**) <u>Điều kiện để hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có nghiệm duy nhất, có vô số nghiệm, vô nghiệm</u>.*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$ *(a, b, c, a', b', c' khác 0)*

+ Hệ có vô số nghiệm nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

+ Hệ vô nghiệm nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

+ Hệ có một nghiệm duy nhất nếu $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

+ Điều kiện cần để hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm là

$$\boxed{ab' - a'b = 0}$$

3. *Các phương pháp giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn .*

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

a) *Phương pháp cộng đại số.*

**) Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số*

- ✓ ***Bước1:*** *Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.*
- ✓ ***Bước 2:*** *Áp dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn)*
- ✓ ***Bước 3:*** *Giải phương trình một ẩn vừa thu được, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho*

**) Tổng quát:*

+ *Nếu có* $\begin{cases} ax+by=c \\ -ax+b'y=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+b')y=c+c' \\ -ax+b'y=c' \end{cases}$

+ *Nếu có* $\begin{cases} ax+by=c \\ ax+b'y=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-b')y=c-c' \\ ax+b'y=c' \end{cases}$

+ *Nếu có* $\begin{cases} ax+by=c \\ k.ax+b'y=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k.ax+kby=kc \\ k.ax+b'y=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (kb-b')y=k.c-c' \\ ax+by=c \end{cases}$

b) *Phương pháp thế.*

**) Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế*

- ✓ ***Bước 1:*** *Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn*
- ✓ ***Bước 2****: Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho*

**) Tổng quát:*

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b} \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b} \\ a'x+b'\left(-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}\right)=c' \end{cases}$$

c) *Phương pháp đồ thị*

- Vẽ hai đường thẳng biểu diễn hai tập nghiệm của hai phương trình trong hệ

- Dựa vào đồ thị, xét vị trí tương đối của hai dường thẳng

+) Nếu hai đường thẳng cắt nhau thì hệ có nghiệm duy nhất, dựa vào đồ thị đoán nhận nghiệm duy nhất đó, sau đó thử lại và kết luận nghiệm của hệ

+) Nếu hai đường thẳng song song thì hệ vô nghiệm

+) Nếu hai đường thẳng trùng nhau thì hệ có vô số nghiệm

Chú ý: *Có thể đặt ẩn phụ trước khi áp dụng các phương pháp giải hệ: (áp dụng cho các hệ phương trình chứa ẩn ở mẫu, dưới dấu căn bậc hai.)*

PHÂN DẠNG BÀI TẬP CHI TIẾT

Dạng 1: Giải hệ phương trình không chứa tham số

Dạng 2: Giải hệ phương trình khi biết giá trị của tham số

Phương pháp:

✓Bước 1: Thay giá trị của tham số vào hệ phương trình

✓Bước 2: Giải hệ phương trình không chứa tham số vừa thu được.

Dạng 3: Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số

- Dùng phương pháp cộng hoặc thế để tìm x theo tham số m (hoặc y theo tham số m), làm xuất hiện phương trình có dạng :

$\boxed{Ax = B}$ (1) (hoặc $\boxed{Ay = B}$)

✓ Nếu A = 0 thì phương trình (1) có dạng 0x = B.

+) Khi B = 0 thì phương trình (1) có dạng 0x = 0

$\Rightarrow$ phương trình có vô số nghiệm

=> hệ phương trình có vô số nghiệm

+) Khi $B \neq 0$ phương trình (1) vô nghiệm

=> hệ phương trình vô nghiệm

✓ Nếu $A \neq 0$ thì phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $\frac{B}{A}$

=> hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{B}{A} \\ y = y(m) \end{cases}$

Dạng 4: Tìm giá trị của tham số để hệ phương trình có nghiệm duy nhất, vô nghiệm, vô số nghiệm.

*) *Điều kiện để hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có nghiệm duy nhất, có vô số nghiệm, vô nghiệm.*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{(a, b, c, a', b', c' khác 0)}$$

+ *Hệ có vô số nghiệm nếu* $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

+ *Hệ vô nghiệm nếu* $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

+ *Hệ có một nghiệm duy nhất nếu* $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

Dạng 5: Tìm giá trị tham số khi biết dấu của nghiệm của hệ phương trình

Dạng 6: Tìm giá tham số khi biết nghiệm của hệ phương trình

6.1: Tìm một giá trị tham số khi biết nghiệm của hệ phương trình.

Cho hệ phương trình : $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$

Tìm giá trị tham số để hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

Cách 1:

Thay $x = x_0$; $y = y_0$ lần lượt vào (1) và giải.

Thay $x = x_0$; $y = y_0$ lần lượt vào (2) và giải.

Cách 2:

Thay $x = x_0$; $y = y_0$ vào cả hai phương trình và giải hệ phương trình chứa ẩn là tham số

6.2: Tìm hai giá trị tham số khi biết nghiệm của hệ phương trình.

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

✓Bước 1: Thay $x = x_0$; $y = y_0$ vào cả hai phương trình của hệ phương trình ta được $\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ a'x_0 + b'y_0 = c' \end{cases}$

✓Bước 2: Giải hệ phương trình chứa ẩn là tham số.

Dạng 7: Tìm giá trị tham số khi biết hệ thức liên hệ giữa x và y.

Cho hệ phương trình : $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$ (I)

Có nghiệm (x; y) thoả mãn: $px + qy = d$ (3)

- ✓ Bước 1: Trước hết cần tìm điều kiện của tham số để hệ (I) có nghiệm duy nhất
- ✓ Bước 2: Do (x; y) là nghiệm của hệ (I) và thoả mãn (3) $\Rightarrow$ (x; y) là nghiệm của (1), (2), (3). Kết hợp 2 phương trình đơn giản nhất để được một hệ phương trình => Giải hệ tìm nghiệm thay vào phương trình còn lại
- ✓ Bước 3: Giải phương trình chứa ẩn là tham số

Dạng 8: Tìm giá trị tham số m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ là những số nguyên

- ✓ Bước 1: Tìm điều kiện của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất
- ✓ Bước 2: Phân tích x_0 ; y_0 dưới dạng

$x_0 = a + \dfrac{b}{A(m)}$ với a, b $\in Z$

$y_0 = c + \dfrac{d}{B(m)}$ với c, d $\in Z$

$$\begin{cases} x_0 \in Z <=> \dfrac{b}{A(m)} \in Z <=> A(m) \in Ư(b) \\ y_0 \in Z <=> \dfrac{d}{B(m)} \in Z <=> B(m) \in Ư(d) \end{cases} => m = ?$$

*) Đặc biệt nếu :

$x_0 = a + \dfrac{b}{A(m)}$ với a, b $\in Z$

$y_0 = c + \dfrac{d}{A(m)}$ với c, d $\in Z$

$=> x_0, y_0 \in Z <=> A(m) \in ƯC(b,d) => m = ?$

Dạng 9: Tìm giá trị tham số để biểu thức liên hệ giữa x, y là $P(x,y) = ax^2 + bx + c$ nhận giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Cách 1:

- Bước 1: Trước hết tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm duy nhất
- Bước 2: Biến đổi biểu thức liên hệ giữa x và y là:

$$P(x,y) = kA^2(x) + d \text{ (d là hằng số).}$$

  - ✓ $k < 0 \Rightarrow kA^2(x) \le 0 \Rightarrow kA^2(x) + d \le d \Rightarrow P(x,y) \le d$
    Giá trị lớn nhất của P(x,y) bằng d đạt được khi A(x) = 0.
  - ✓ $k > 0 \Rightarrow kA^2(x) \ge 0 \Rightarrow kA^2(x) + d \ge d \Rightarrow P(x,y) \ge d$
    Giá trị nhỏ nhất của P(x,y) bằng d đạt được khi A(x) = 0.

Cách 2:

$$P(x,y) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 + bx + c - P(x,y) = 0$$

- ✓ Bước 1: Tính Δ hoặc Δ'.
- ✓ Bước 2: Đặt điều kiện $\Delta \ge 0$ $(\Delta' \ge 0)$

  $\Rightarrow$ Giải bất phương trình chứa ẩn P(x,y).

  - ✓ $P(x,y) \ge e \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của P(x,y) bằng e đạt được khi

    $\Delta = \Delta' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-b'}{a}$.
  - ✓ $P(x,y) \le e \Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của P(x,y) bằng e đạt được khi

    $\Delta = \Delta' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-b'}{a}$

Dạng 10: Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào tham số

1. Phương pháp:

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ trong đó a, b, c, a', b', c' chứa tham số m. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào tham số m ?

*) Cách 1:

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ ta rút m theo x và y là $m = A(x,y)$
- Bước 2: Thay $m = A(x,y)$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào tham số m

*) Cách 2: Sử dụng đối với hệ phương trình có tham số m dưới dạng bậc nhất

- ✓ Bước 1: Từ hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = A(x,y) \\ m = B(x,y) \end{cases}$
- Bước 2: Cho $A(x,y) = B(x,y)$. Đây là hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào tham số m

Lưu ý: Ta cần rút gọn các hệ thức sao cho ngắn gọn, đơn giản nhất

Dạng 11: Tìm giá trị của tham số để hai hệ phương trình tương đương

- Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm (tức là mọi nghiệm của hệ này đều là nghiệm của hệ kia và ngược lại)

Dạng 12: Giải hệ phương trình theo phương pháp đặt ẩn phụ và giải một số hệ phương trình không ở dạng hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn (hệ đặc biệt)

VI – Phương trình bậc hai một ẩn

PHẦN I: PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỨA THAM SỐ

I. *Định nghĩa: Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng* $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

Trong đó: x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số

II. *Phân loại.*

1. *Phương trình khuyết c:* $ax^2 + bx = 0\ (a \neq 0)$

Phương pháp giải:

$ax^2 + bx = 0\ (a, b \neq 0)$

$$\Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{-b}{a} \end{array}\right.$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{-b}{a}$

2. *Phương trình khuyết b:* $ax^2 + c = 0\ \ (a, c \neq 0)$

Phương pháp giải:

$ax^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-c}{a}$

+) *Nếu* $\dfrac{-c}{a} < 0 \Rightarrow$ *Phương trình vô nghiệm.*

+) *Nếu* $\dfrac{-c}{a} > 0 \Rightarrow$ *Phương trình có hai nghiệm phân biệt:*

$$x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}};\ x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

3. *Phương trình bậc hai đầy đủ:* $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \neq 0)$

**) Công thức nghiệm:*

$\Delta = b^2 - 4ac$

+) $\Delta < 0 \Rightarrow$ *Phương trình vô nghiệm*

+) $\Delta > 0 \Rightarrow$ *phương trình có hai nghiệm phân biệt:*

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

+) $\Delta = 0 \Rightarrow$ *Phương trình có nghiệm kép:* $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

**) Công thức nghiệm thu gọn*

Nếu $b = 2b' \left(b' = \dfrac{b}{2}\right) \rightarrow$ *ta có :* $\Delta' = b'^2 - ac$

+ *Nếu* $\Delta' > 0 \rightarrow$ *phương trình có hai nghiệm phân biệt là :*

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \ ;\ x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

+ *Nếu* $\Delta' = 0 \rightarrow$ *phương trình có nghiệm kép*

$$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$$

+ *Nếu* $\Delta' < 0 \rightarrow$ *phương trình vô nghiệm*

PHẦN II – CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Dạng 1: Giải phương trình khi biết giá trị của tham số

Thay giá trị của tham số vào phương trình và giải phương trình

Dạng 2: Giải và biện phương trình theo tham số

Tổng quát:

✓ Với a = 0: Phương trình trở thành phương trình bậc nhất bx + c = 0.

+ Nếu $b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \dfrac{-c}{b}$

+ Nếu $b = 0$ và $c \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $b = 0$ và $c = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm.

✓ Với $a \neq 0$ phương trình trở thành phương trình bậc hai có biệt số:

$\Delta = b^2 - 4ac$ (hay $\Delta' = b'^2 - ac$)

+ Nếu $\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$) thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$) thì phương trình có nghiệm kép :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{b'}{a}$$

+ Nếu $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$) thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a};\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$$

Dạng 3: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm

- Xét hai trường hợp của hệ số a:
  - ✓ Trường hợp 1: a = 0, ta tìm được một vài giá trị của m, sau đó thay trực tiếp vào phương trình rồi kết luận với những giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm
  - ✓ Trường hợp 2: $a \neq 0$, phương trình bậc hai một ẩn có nghiệm <=> $\Delta \geq 0 (\Delta' \geq 0)$

Dạng 4: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có hai nghiệm phân biệt

Phương trình bậc hai một ẩn có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 (\Delta' > 0) \end{cases}$$

Dạng 5: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm kép

Phương trình bậc hai một ẩn có nghiệm kép <=> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 (\Delta' = 0) \end{cases}$

Dạng 6: Tìm điều kiện của tham số để phương trình vô nghiệm

- Xét hai trường hợp của hệ số a:
  - ✓ Trường hợp 1: a = 0, ta tìm được một vài giá trị của m, sau đó thay trực tiếp vào phương trình rồi kết luận với những giá trị nào của m thì phương trình vô nghiệm
  - ✓ Trường hợp 2: $a \neq 0$, phương trình bậc hai một ẩn vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 (\Delta' < 0)$$

Dạng 7: Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Để chứng minh phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt:

➢ Cách 1: Chứng minh: $\begin{cases} a \neq 0 \\ ac < 0 \end{cases}$

- Cách 2: Chứng minh: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Chú ý: Cho tam thức bậc hai $\Delta = am^2 + bm + c$

Để chứng minh $\Delta > 0, \forall m$ ta cần chứng minh $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta_m = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$

Dạng 8: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu, trái dấu, có hai nghiệm dương, có hai nghiệm âm, có hai nghiệm dương phân biệt, có hai nghiệm âm phân biệt, có hai nghiệm là hai số đối nhau, có hai nghiệm là hai số nghịch đảo của nhau

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$; trong đó a, b, c chứa tham số

Theo định lí Vi - ét, ta có : $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

a) Phương trình có hai nghiệm cùng dấu <=> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ ac > 0 \end{cases}$

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu <=> $\begin{cases} a \neq 0 \\ P < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ ac < 0 \end{cases}$

c) Phương trình có hai nghiệm dương <=> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

d) Phương trình có hai nghiệm âm <=> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

e) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt <=> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

f) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt <=> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

g) Phương trình có hai nghiệm là hai số đối nhau

<=> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 0 \end{cases}$

h) Phương trình có 2 nghiệm là hai số nghịch đảo của nhau

<=> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = 1 \end{cases}$

Dạng 9: Tính giá trị của biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm

- ✓ Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.
- ✓ Bước 2: Tính $x_1 + x_1 = \frac{-b}{a}$ và $x_1.x_1 = \frac{c}{a}$
- ✓ Bước 3: Biểu thị được các biểu thức theo $x_1 + x_1$ và $x_1.x_1$; sau đó thay giá trị của $x_1 + x_1$ và $x_1.x_1$ vào để tính giá trị của biểu thức.

Chú ý:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$
$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$
$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (a+b) + 2\sqrt{a.b} \qquad (a,b \geq 0)$$
$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$$
$$\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} = a\sqrt{a} + b\sqrt{b}$$
$$= (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b) \quad (a,b \geq 0)$$

Dạng 10: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a) $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = n$ c) $x_1{}^2 + x_2{}^2 = k$ d) $x_1{}^3 + x_2{}^3 = t$,

....

- **Bước 1:** Tìm điều kiện của tham số để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2. Giải hệ ĐK: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ => m = ?
- **Bước 2:** Theo hệ thức Vi – ét, ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$
- **Bước 3:** Biến đổi điều kiện của đề bài (là một đẳng thức hoặc bất đẳng thức) để có tổng và tích hai nghiệm, sau đó thay tổng và tích hai nghiệm có được ở bước 2 vào điều kiện vừa biến đổi; từ đó giải phương trình hoặc bất phương trình với biến là tham số để tìm giá trị của tham số. Tiếp theo kiểm tra xem các giá trị tham số tìm được có thỏa mãn hệ điều kiện ở bước 1 hay không ?

  Hoặc có bài toán ta kết hợp điều kiện của đề bài với một hệ thức Vi - ét để tìm hai nghiệm x_1, x_2 (giải hệ phương trình với hai ẩn là x_1, x_2); sau đó ta thay x_1, x_2 vào hệ thức Vi – ét còn lại để tìm tham số.

Dạng 11: Tìm điều kiện để phương trình có một nghiệm x = x_1. Tìm nghiệm còn lại

- **Bước 1:** Thay x = x_1 vào phương trình, ta có:

$$ax_1^{\ 2} + bx_1 + c = 0 => m = ?$$

- **Bước 2:** Để tìm nghiệm còn lại x_2 ta thực hiện theo hai cách:

<u>Cách 1:</u> Thay giá trị của m vào phương trình ban đầu. Từ đó có phương trình bậc hai và giải phương trình này ta tìm được x_2

<u>Cách 2:</u> Tính x_2 nhờ định lí Vi - ét: $x_2 = S - x_1$ hoặc $x_2 = P : x_1$

Dạng 12: Tìm phương trình bậc hai khi biết trước hai nghiệm số

- Trường hợp 1: Cho từng nghiệm x_1, x_2 . Ta có phương trình với ẩn x là :

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 <=> x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

- Trường hợp 2: Không có x_1, x_2 riêng
  - ✓ Bước 1: Tìm S = $x_1 + x_2$ và P = $x_1 x_2$
  - ✓ Bước 2: Phương trình với ẩn x là $x^2 - Sx + P = 0$.

    Phương trình có nghiệm <=> $S^2 \geq 4P$

Dạng 13: Lập phương trình bậc hai khi biết mối liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình cần lập với hai nghiệm của phương trình cho trước.

- ✓ Bước 1: Kiểm tra ĐK có nghiệm của phương trình.
- ✓ Bước 2: Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình đã cho

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \quad x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

- ✓ Bước 3: Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình cần lập x_3 và x_4 thông qua mối liên hệ với x_1 , x_2.
- ✓ Bước 4: Lập phương trình.

Dạng 14: Tìm đẳng thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số

- **Cách 1:**
  - ✓ Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

    Giải hệ điều kiện $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$
  - ✓ Bước 2: Tính hệ thức Vi - ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$
  - ✓ Bước 3: Khử tham số trong hệ thức Vi – ét, tìm hệ thức liên hệ giữa S và P. Đó là hệ thức độc lập với tham số giữa các nghiệm của phương trình.
- **Cách 2:**
  - ✓ Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

    Giải hệ điều kiện $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$
  - ✓ Bước 2: Giải phương trình tìm x_1, x_2.
  - ✓ Bước 3: Tìm hệ thức (khử tham số).

Dạng 15: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của tam thức bậc hai

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Cách 1:

Biến đổi $y = kA^2(x) + m$ (m là hằng số).

- ✓ $k < 0 \Rightarrow kA^2(x) \leq 0 \Rightarrow kA^2(x) + m \leq m \Rightarrow y \leq m$

  Giá trị lớn nhất của y bằng m đạt được khi A(x) = 0.
- ✓ $k > 0 \Rightarrow kA^2(x) \geq 0 \Rightarrow kA^2(x) + m \geq m \Rightarrow y \geq m$

  Giá trị nhỏ nhất của y bằng m đạt được khi A(x) = 0.

Cách 2:

$y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 + bx + c - y = 0$

+ Bước 1: Tính Δ hoặc Δ'.

+ Bước 2: Đặt điều kiện $\Delta \geq 0$ $(\Delta' \geq 0)$

$\Rightarrow$ Giải bất phương trình chứa ẩn y.

✓ $y \geq m \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của y bằng m đạt được khi

$$\Delta = \Delta' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-b'}{a}.$$

✓ $y \le m \Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của y bằng m đạt được khi

$$\Delta = \Delta' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-b'}{a}$$

Dạng 16: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm

- ✓ Bước 1: Kiểm tra sự có nghiệm của phương trình
- ✓ Bước 2: Tính $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$
- ✓ Bước 3: Biến đổi biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm là $A(x_1; x_2)$ về dạng có chứa $x_1 + x_2$ và $x_1.x_2$
- ✓ Bước 4: Thay $x_1 + x_2$ và $x_1.x_2$ vào biểu thức A. Khi đó A trở thành tam thức bậc hai ẩn là tham số.
- ✓ Bước 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của A. Chọn giá trị tham số thích hợp.

Dạng 17: Chứng minh biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số

- ✓ Bước 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2
- ✓ Bước 2: Tính hệ thức Vi- ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$
- ✓ Bước 3: Tính giá trị của biểu thức theo $x_1 + x_2$ và $x_1.x_2$; thấy kết quả là một hằng số => Biểu thức liên hệ giữu hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số
- ✓

Dạng 18: Tìm giá trị của tham số để hai nghiệm của phương trình thỏa mãn bất đẳng thức đã cho.

Dạng 19: Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số u và v thoả mãn $\begin{cases} u + v = S \\ u.v = P \end{cases}$ $(S^2 \ge 4P)$. Thì u và v là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ (*)

- Nếu phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Do x, y có vai trò như nhau nên có hai cặp số thỏa mãn là $\begin{cases} u = x_1 \\ v = x_2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = x_2 \\ v = x_1 \end{cases}$

- Nếu phương trình (*) có nghiệp kép $x_1 = x_2 = a$ => u = v = a

- Nếu phương trình (*) vô nghiệm => Không tìm được cặp giá trị (u, v) nào thỏa mãn yêu cầu đề bài

Dạng 20: Tìm giá trị của tham số để hai phương trình bậc hai một ẩn có nghiệm chung

Cho hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ và $a'x^2 + b'x + c' = 0\ (a' \neq 0)$

Trong đó a, b, c, a', b', c' chứa tham số m

*) Cách 1:

- Hai phương trình trên có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0) \\ a'x^2 + b'x + c' = 0\ (a' \neq 0) \end{cases} \quad \text{có nghiệm}$$

- Trừ vế với vế của hai phương trình trong hệ ta có phương trình dạng:

$$A(m).x = B(m)$$

+) Nếu A(m) = 0, từ đẳng thức này ta rút ra một vài giá trị của m, sau đó thay trực tiếp vào hai phương trình $\rightarrow$ giải hai phương trình không chứa tham số và xét xem ứng với giá trị m đó hai phương trình có nghiệm chung hay không ?

+) Nếu $A(m) \neq 0$ => x = $\dfrac{B(m)}{A(m)}$ (chứa tham số). Thay vào một trong hai phương trình ta rút ra một vài giá trị của m, sau đó thay từng giá trị của m vào hai phương trình $\rightarrow$ giải hai phương trình không chứa tham số và xét xem ứng với giá trị m đó hai phương trình có nghiệm chung hay không ?

+) Nếu $A(m) \neq 0$ => x = $\dfrac{B(m)}{A(m)}$ (không chứa tham số), kết luận ngay đây là nghiệm chung của hai phương trình. Thay nghiệm chung đó vào một trong hai phương trình ta rút ra giá trị của m

- Kết luận: ứng với giá trị m nào thì hai phương trình có nghiệm chung, nghiệm chung là gì ?

*) Cách 2: Chỉ thực hiện cách giải này ở một số bài toán đơn giản

Từ hai phương trình

$ax^2 + bx + c = 0$ => m = A(x)

$a'x^2 + b'x + c' = 0$ => m = B(x)

Ta có: A(x) = B(x). Giải phương trình này ta được nghiệm chung của hai phương trình, sau đó thay nghiệm chung đó vào một trong hai phương trình ta tìm được giá trị của tham số m, nếu cần thiết thử lại để kiểm tra

Cách 3: Chỉ thực hiện cách giải này ở một số bài toán đơn giản

Từ một trong hai phương trình ta rút m theo x và thế vào phương trình kia, được phương trình ẩn x; từ phương trình này ta tìm được nghiệm chung, sau đó tìm m = ?

Dạng 21: Chứng minh trong hai phương trình bậc hai một ẩn có ít nhất một phương trình có nghiệm

Cho hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ và $a'x^2 + b'x + c' = 0\ (a' \neq 0)$

Trong đó a, b, c, a', b', c' chứa tham số

Chứng minh ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Phương pháp:

Cách 1: Gọi Δ_1, Δ_2 lần lượt là biệt thức của hai phương trình. Ta cần chứng minh

+) $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$ => $\Delta_1 \geq 0$ hoặc $\Delta_2 \geq 0$ hoặc $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0$

+) $\Delta_1 . \Delta_2 \leq 0$ => $\Delta_1 \geq 0$ hoặc $\Delta_2 \geq 0$

Vậy ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Cách 2: Chứng minh bằng phản chứng

Giả sử cả hai phương trình đều vô nghiệm. Khi đó $\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0$

Ta lập luận dẫn đến điều vô lí => phải có ít nhất một trong hai biệt thức không âm. Vậy có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Dạng 22: Tìm giá trị của tham số để hai phương trình tương đương

- Lí thuyết chung: Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm

*) Dạng 22.1: Hai phương trình bậc nhất

Tìm nghiệm của hai phương trình theo tham số và cho hai nghiệm bằng nhau, từ đó tìm được giá trị của tham số để hai phương trình tương đương

*) Dạng 22.2: Hai phương trình bậc hai một ẩn

Xét hai trường hợp

- Trường hợp1: Hai phương trình có nghiệm chung

  Trước hết tìm giá trị của tham số để hai phương trình có nghiệm chung sau đó thay giá trị của tham số vào hai phương trình và tìm tập nghiệm của chúng. Nếu tập nghiệm bằng nhau thì hai phương trình tương đương => giá trị của tham số

- Trường hợp 2: Hai phương trình cùng vô nghiệm <=> $\begin{cases}\Delta_1 < 0\\ \Delta_2 < 0\end{cases}$

=> Giá trị của tham số

Đặc biệt: Nếu nhận thấy một trong hai phương trình có hai nghiệm

$$(\Delta_1 \geq 0 \text{ hoặc } \Delta_2 \geq 0)$$

=> Hai phương trình tương đương khi hai nghiệm của phương trình này cũng là hai nghiệm của phương trình kia, do đó ta có thể áp dụng vi - ét cho cả hai phương trình và tìm tham số.

Cụ thể ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-b'}{a'}; x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-c'}{a'} \Rightarrow m = ?$

Dạng 23: Tìm giá trị của tham số khi biết nghiệm của phương trình

23.1: Tìm giá trị của tham số khi biết một nghiệm của phương trình.

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có một nghiệm $x = x_1$.

Cách giải:

- ✓ Bước1: Thay $x = x_1$ vào phương trình $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$.
- ✓ Bước 2: Giải phương trình có ẩn là tham số.

23.2: Tìm giá trị của tham số khi biết hai nghiệm của phương trình.

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) $(a \neq 0)$ có hai nghiệm $x = x_1$; $x = x_2$.

Cách 1:

- ✓ Bước 1: Thay $x = x_1$; $x = x_2$ vào phương trình (1) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}ax_1^2 + bx_1 + c = 0\\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0\end{cases}$
- ✓ Bước 2: Giải hệ phương trình có ẩn là tham số.

Cách 2:

- ✓ Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.
- ✓ Bước 2: Theo Vi - ét $\begin{cases}x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}\\ x_1.x_2 = \frac{c}{a}\end{cases}$
- ✓ Bước 3: Thay $x = x_1$; $x = x_2$ vào hệ và giải ta được giá trị của tham số.

Dạng 24: Xác định giá trị tham số để tam thức bậc hai luôn luôn dương hoặc luôn luôn âm với mọi x

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

+) Nếu $\Delta < 0$ => $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Khi đó f(x) cùng dấu với hệ số a, ta có các trường hợp sau

✓ $f(x) > 0,\ \forall x \iff \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

✓ $f(x) < 0,\ \forall x \iff \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

✓ $f(x) \geq 0,\ \forall x \iff \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

✓ $f(x) \leq 0,\ \forall x \iff \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

+) Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2$

=> f(x) cùng dấu với hệ số a, trừ trường hợp $x = \frac{-b}{2a}$

Khi $x = \frac{-b}{2a}$ thì $f(x) = 0$

VII – Giải bài toán bằng cách lập phương trình, lập hệ phương trình.

LÍ THUYẾT CHUNG

1. Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình

Bước 1: Lập phương trình.

- Chọn ẩn số và xác định điều kiện thích hợp cho ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không rồi kết luận.

2. Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Bước 1: Lập hệ phương trình.

- Chọn hai ẩn số và xác định điều kiện thích hợp cho chúng;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết;

- Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ hai phương trình nói trên .

Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không rồi kết luận.

PHÂN DẠNG BÀI TẬP CHI TIẾT

Dạng 1: Toán chuyển động

- Ba đại lượng: S, v, t
- Quan hệ: $S = vt$; $t = \frac{S}{v}$; $v = \frac{S}{t}$ (dùng công thức S = v.t từ đó tìm mối quan hệ giữa S , v và t)
- Chú ý bài toán canô :

$$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{thực}} + V_{\text{nước}}\ ;\ V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{thực}} - V_{\text{nước}}$$

*) Toán đi gặp nhau cần chú ý đến tổng quãng đường và thời gian bắt đầu khởi hành.

*) Toán đuổi kịp nhau chú ý đến vận tốc hơn kém và quãng đường đi được cho đến khi đuổi kịp nhau

Dạng 2: Toán về quan hệ giữa các số

$$\overline{ab} = 10a + b$$

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

Điều kiện: $0 < a \le 9;\ 0 \le b, c \le 9 \quad (a, b, c \in Z)$

Dạng 3: Toán làm chung, làm riêng, năng suất

*) Bài toán làm chung, làm riêng:

+ Qui ước: Cả công việc là 1 đơn vị.

+ Tìm trong 1 đv thời gian đối tượng tham gia bài toán thực hiện được bao nhiêu phần công việc.

+ Công thức: Phần công việc = $\frac{1}{\text{Thời gian}}$

+ Số lượng công việc = Thời gian . Năng suất.

*) Bài toán năng suất:

+ Gồm ba đại lượng: Tổng sản phẩm ; năng suất; thời gian

+ Quan hệ: Tổng sản phẩm = Năng suất . Thời gian;

=> Thời gian = $\frac{\text{Tổng sản phẩm}}{\text{Năng suất}}$; Năng suất = $\frac{\text{Tổng sản phẩm}}{\text{Thời gian}}$.

Dạng 4: Toán diện tích

Dạng 5: Toán có quan hệ hình học

Dạng 6: Toán có nội dung lí, hóa

Dạng 7: Toán dân số, toán phần trăm

VIII – Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

Phương pháp 1: Đặt nhân tử chung

a) Phương pháp đặt nhân tử chung được dùng khi các hạng tử của đa thức có nhân tử chung. Cụ thể: $AB + AC + AD = A(B + C + D)$

b) Các bước tiến hành:

Bước 1: Phát hiện nhân tử chung và đặt nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc.

Bước 2: Viết các hạng tử trong ngoặc bằng cách chia từng hạng tử của đa thức cho nhân tử chung.

Phương pháp 2: Dùng hằng đẳng thức

a) Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức được dùng khi các hạng tử của đa thức có dạng hằng đẳng thức.

b) Các hằng đẳng thức quan trọng

1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a + 2\sqrt{a.b} + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \quad (a,b \geq 0)$

2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$a - 2\sqrt{a.b} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \quad (a,b \geq 0)$

3) $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$

4) $a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b}).(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \quad (a,b \geq 0)$

5) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

$\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + \sqrt{b^3} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^3 \quad (a,b \geq 0)$

6) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

$\sqrt{a^3} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - \sqrt{b^3} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 \quad (a,b \geq 0)$

7) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = \sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b) \quad (a,b \geq 0)$

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ với n lẻ

8) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a\sqrt{a} - b\sqrt{b} = \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b) \quad (a,b \geq 0)$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

9) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$

$a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \quad (a,b \geq 0)$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = (a + b + c + d)^2$

10) Lũy thừa bậc n của một nhị thức (nhị thức Niu tơn) – Đối tượng HSG

$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = 1a + 1b$
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

....

Viết tam giác Pa – xcan để khai triển $(a+b)^n$ như sau:

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

……………………………………………..

Cách viết:

+ Mỗi dòng đều bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 1
+ Mỗi số trên một dòng kể từ dòng thứ hai đều bằng số liền trên cộngvới số bên trái của số liền trên.

Phương pháp 3: Nhóm các hạng tử

Phương pháp này thường được dùng cho những đa thức cần phân tích thành nhân tử chưa có nhân tử chung hoặc chưa áp dụng ngay được hằng đẳng thức mà sau khi nhóm các hạng tử đó hoặc biến đổi sơ bộ rồi nhóm lại thì xuất hiện hằng đẳng thức hoặc có nhân tử chung, cụ thể:

Bước 1: Phát hiện nhân tử chung hoặc hằng đẳng thức ở từng nhóm.

Bước 2: Nhóm để áp dụng phương pháp hằng đẳng thức hoặc đặt nhân tử chung.

Bước 3: Đặt nhân tử chung cho toàn đa thức.

Phương pháp 4: Tách một hạng tử thành nhiều hạng tử; hoặc thêm, bớt cùng một hạng tử

**) Lí thuyết chung: Phương pháp này nhằm biến đổi đa thức để tạo ra những hạng tử thích hợp để nhóm hoặc sử dụng hằng đẳng thức:*

**) Các trường hợp:*

a, Trường hợp đa thức dạng $ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in Z; a, b, c \neq 0$)

Tính : $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: Đa thức không phân tích được.

- Nếu $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: Đa thức chuyển về dạng bình phương của một nhị thức bậc nhất

- Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

+) $\Delta = b^2 - 4ac = k^2$ ($k \in Q$) đa thức phân tích được trong trường Q.

+) $\Delta = b^2 - 4ac \neq k^2$ đa thức phân tích được trong trường số thực R.

b, Trường hợp đa thức từ bậc 3 trở lên:

- Nhẩm nghiệm của đa thức:

+) Nếu tổng các hệ số của các hạng tử bằng 0 $\Rightarrow$ đa thức có nghiệm bằng 1.

+) Nếu tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ $\Rightarrow$ đa thức có nghiệm bằng - 1.

- Lưu ý định lý: " Nếu đa thức có nghiệm nguyên thì nghiệm nguyên đó phải là ước của hạng tử tự do. Nếu đa thức có nghiệm hữu tỉ dạng $\frac{p}{q}$ thì p là ước của hạng tử tự do, q là ước dương của hệ số của hạng tử có bậc cao nhất".

- Khi biết một nghiệm của đa thức ta có thể dùng phép chia đa thức, hoặc dùng sơ đồ Hooc – ne để hạ bậc của đa thức.

Phương pháp 5: Dùng phép chia đa thức (nhẩm nghiệm)

- Đa thức f(x) chia hết cho đa thức g(x) khi và chỉ khi: f(x)= g(x).q(x)

(q(x) là thương của phép chia)

**) Đặc biệt : f(x) chia hết cho x - a <=> f(a) = 0*

Phương pháp 6: Phương pháp đặt ẩn phụ (đổi biến)

- Dựa vào đặc điểm của đa thức đã cho ta đưa vào 1 hoặc nhiều biến mới để đa thức trở thành đơn giản .Phương pháp này thường được sử dụng để đưa một đa thức bậc cao về đa thức bậc 2 mà ta có thể phân tích được dựa vào tìm nghiệm của đa thức bậc 2 .

- Cần phát hiện sự giống nhau của các biểu thức trong đa thức để chọn và đặt ẩn phụ cho thích hợp

Phương pháp 7: Phương pháp hệ số bất định (đồng nhất hệ số)

Trên cơ sở bậc của đa thức phải phân tích, ta xác định các dạng kết quả, phá ngoặc rồi đồng nhất hệ số và giải.

Phương pháp 8: Phương pháp vận dụng định lí về nghiệm của tam thức bậc hai

- Áp dụng định lý: Nếu đa thức $P = ax^2 + bx + c$ có nghiệm x_1, x_2 thì :

$$P = a(x - x_1)(x - x_2)$$